Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Gourdon
Briane – Pagès
Dreveton – Lhabouz
Isenmann P (dev 1)

I_ Méthodes élémentaires pour $\mathbb{R}$ [Gou]

1. Calculs de primitives

Théorème 1.1 Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F et $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Exemple 1.2

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} [\arctan x]_0^A = \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1.3 (décomposition en éléments simples) Soit f fonction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$. Pour calculer l'intégrale de f, on la décompose en éléments simples pour se ramener à des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ et $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}\,dx$ avec $c^2 - 4d < 0$.

Exemple 1.4

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1$$

Méthode 1.5 Soit f une fonction rationnelle en sinus et cosinus, une méthode consiste à effectuer le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$.

Méthodes 1.6 (règles de Bioche) Soit f une fraction rationnelle en sinus et cosinus, alors :

- si $f(t) = f(\pi - t)$, on pose $u = \sin t$
- si $f(t) = f(-t)$, on pose $u = \cos t$
- si $f(t) = f(\pi + t)$, on pose $u = \tan t$

Exemples 1.7

- $\int_1^2 \frac{dx}{\sin x} = \left[\log \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right]_1^2$
- $\int_0^1 \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left[\cos x - 2\arctan(\cos x) \right]_0^1$

2. Intégration par parties

Théorème 1.8 (intégration par parties) Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. Alors : $\int_a^b u(x) v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,dx$.

Exemple 1.9 (intégrale de Wallis)

$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}$$

II_ Théorie de Lebesgue [Bri]

1. Théorèmes de convergence monotone et dominée

On se place sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

Théorème 2.1 (convergence monotone) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors $f := \lim_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f\,d\mu = \lim_n \uparrow \int_X f_n\,d\mu$.

Exemple 2.2

Soit $I_n(\alpha) := \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\,dx$

Alors :

$$\lim_n I_n(\alpha) = \begin{cases} 1/1-\alpha & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.3 (convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifiant :

- $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ μ-p.p.
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$; $\forall n$, $|f_n| \leq g$ μ-p.p.

Alors $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_n \int f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$

Exemple 2.4

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Intégrales à paramètres

Soient (E,d) espace métrique et $(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré. On se donne une application $f : E\times X \longrightarrow \mathbb{K}$.

Théorème 2.5 (continuité sous le signe intégrale) Soit $u_0 \in E$. Si :

- $\forall u \in E,\ f(u,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$
- μ-p.p., $u \longmapsto f(u,x)$ continue en u_0
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu),\ \forall u\in E,\ |f(u,\cdot)| \leqslant g$ μ-p.p

Alors la fonction $F : u \longmapsto \int_X f(u,\cdot)\,d\mu$ est définie sur E, continue en u_0.

Application 2.6 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, est bien définie et continue.

Théorème 2.7 (dérivation sous le signe intégrale) On suppose $E = I$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si la fonction f vérifie :

- $\forall u \in I,\ f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- $\mu(dx)$-p.p, $f(\cdot,x)$ dérivable sur I
- μ-p.p., $\forall u \in I,\ |f(u,\cdot)| \leqslant g$ où $\mathcal{L}^1(\mu)$

alors $F : u \longmapsto \int_X f(u,\cdot)\,d\mu$ est bien définie, dérivable sur I, de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,\cdot)\,d\mu$.

Application 2.8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = e^{-x^2/2}$.

développement 1.a

3. Théorèmes de Fubini

Théorème 2.9 (Fubini - Tonelli) - admis Soient $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable et μ,ν deux mesures σ-finies respectivement sur $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$. Alors :

(i) les fonctions $x \longmapsto \int_Y f(x,\cdot)\,d\nu$ et $y \longmapsto \int_X f(\cdot,y)\,d\mu$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ - mesurables

(ii) $\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu = \int_X \int_Y f(x,\cdot)\,d\nu\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(\cdot,y)\,d\mu\, d\nu(y)$

Théorème 2.10 (Fubini - Lebesgue) On considère les espaces mesurés du théorème précédent et $f \in \mathcal{L}^1(\mu\otimes\nu)$. Alors :

(i) $\mu(dx)$-p.p., $y \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$, $\nu(dy)$-p.p. $x \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii) $x \longmapsto \int_Y f(x,\cdot)\,d\nu \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $y \longmapsto \int_X f(\cdot,y)\,d\mu \in \mathcal{L}^1(\nu)$

(iii) idem au (ii) de 2.9

Application 2.11 (intégration par parties sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) Soient f,g localement intégrables et $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$, $G : x \longmapsto \int_0^x g(t)\,dt$. Alors ces fonctions vérifient $\int_0^x f(t)G(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)\,dt$.

Application 2.12 (intégrale de Fresnel) En considérant les fonctions $f : t \longmapsto \int_0^t e^{ix^2}dx$ et $F : t \longmapsto \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, on montre que l'intégrale de Fresnel définie par : $\varphi := \int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$.

développement 2

III - Méthodes issues d'autres théories [Dre]

1. Transformation de Fourier

Définition 3.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier la fonction $\hat{f}$ définie par $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\,dx$.

Théorème 3.2 (inversion de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour presque tout x, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi$.

De plus, si f est continue, il y a égalité partout.

Corollaire 3.3 La transformation de Fourier est injective sur $\{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Application 3.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt = e^{-|x|}$.

développement 1.b

2. Méthode issue des probabilités

Théorème 3.5 (loi forte des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 1. Alors on a la convergence : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$.

Proposition 3.6 Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]^d$ alors : $\int_{[0,1]^d} f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k$. p.s.

Remarque 3.7 Cela permet d'approximer $\int_K f \, d\lambda_d$ avec K compact de $\mathbb{R}^d$ et f mesurable bornée sur $\mathbb{R}^d$, via des translations et dilatations.

Exemple 3.8

$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{|U_i| \leqslant 1}$ p.s. avec $(U_i)_{i \geqslant 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.