Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue - intégrables

Briane - Pagès
Beck, Malick, ... (dev 1)
Gourdon (dev 2)

On considère dans cette leçon, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Construction de l'intégrale de Lebesgue

1. Intégrale de fonctions étagées positives

Définition 1.1 Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ une fonction étagée positive. On définit l'intégrale de f par rapport à μ par : $\int_X f\, d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha\, \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Proposition 1.2 Soit $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $(A_i)_i$ désigne une partition $\mathcal{A}$-mesurable finie de X. Alors : $\int_X f\, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$.

Remarque 1.3 On constate alors que : $\int_X f\, d\mu < +\infty \iff \mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$.

Exemple 1.4
soit $\mu = \delta_a$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ étagée alors $\int f\, d\mu = f(a)$

Proposition 1.5 L'intégrale vérifie les propriétés d'additivité, de croissance et de positive homogénéité.

Lemme 1.6
(i) Soient $A \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ alors $\mathbb{1}_A f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$. On pose $\int_A f\, d\mu := \int_X \mathbb{1}_A f\, d\mu$.
(ii) Soient $(E_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $X = \bigcup_n \nearrow E_n$. Alors pour tout $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, on a $\int_X f\, d\mu = \lim_n \nearrow \int_{E_n} f\, d\mu$.

2. Intégrales de fonctions mesurables positives

Définition 1.7 Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, mesurable positive finie ou infinie. On définit alors l'intégrale de f par rapport à μ par : $\int_X f\, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi\, d\mu \,\middle|\, \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A}) \right\}$.

Définition 1.8 On dit que $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ est μ-intégrable si $\int_X f\, d\mu < +\infty$.

Théorème 1.9 (de convergence monotone) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ alors $f := \lim f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et $\int_X f\, d\mu = \lim_n \nearrow \int_X f_n\, d\mu$.

Proposition 1.10 Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ alors $\int_X f\, d\mu = 0 \iff f = 0$ μ.p.p.

Proposition 1.11 (Inégalité de Markov) Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$. Alors, pour tout $a > 0$, $\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f\, d\mu$.

3. Fonctions intégrables

Définition 1.12 Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est μ-intégrable si la fonction $|f|$ est μ-intégrable.
On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'espace des fonctions intégrables.

Définition 1.13 Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on pose $\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$.
Avec cette notation, pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on pose $\int_X f\, d\mu := \int_X \mathrm{Re} f\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f\, d\mu$.

Exemple 1.14
sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage m, les fonctions m-intégrables sont les séries absolument convergentes

Proposition 1.15 (Inégalité triangulaire) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$.

Proposition 1.16 Pour toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ Riemann-intégrable, il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ telle que $f = g$ p.p et $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$.

II - Théorèmes de convergence

Théorème 2.1 (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, alors :
$$0 \leq \int_X \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int_X f_n\, d\mu.$$

Application 2.2 Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f et vérifiant $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Théorème 2.3 (de convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mu)$ vérifiant :

(i) pour μ-presque tout x, $f_n(x)$ converge

(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout n, $|f_n| \leq g$ μ-p.p.

Alors il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ μ-p.p et $\lim \int_X |f_n - f| = 0$.
En particulier, $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Application 2.4 (lemme de Borel-Cantelli) Soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Alors, p.s. les A_n sont réalisés un nombre fini de fois.

III. Les espaces L^P

1. Définition et propriétés

Définition 3.1 Pour tout $p > 0$, on définit $\mathcal{L}^P(\mu) := \{ f \mid |f|^P \in \mathcal{L}^1(\mu) \}$.

Exemple 3.2
sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $\mathcal{L}^P(m) = \{ (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^P < +\infty \}$

$\mathbb{1} = (1)_n \notin \mathcal{L}^P(m)$, $\left(\frac{1}{n^{2/p}}\right)_{n \geq 1} \in \mathcal{L}^P(m)$

Proposition 3.3 Soient $0 < p \leq q$. Alors :

- si μ est une mesure finie, $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^P(\mu)$
- si m est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\ell^P(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$

Remarque 3.4 Il n'existe donc pas d'ordre d'inclusion général. Et même avec la mesure de Lebesgue, $L^P(\lambda) \not\subset L^q(\lambda)$ et $L^q(\lambda) \not\subset L^P(\lambda)$.

Théorème 3.5 (Inégalité de Hölder) Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables et $p, q \geq 1$ des exposants conjugués. Alors : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Conséquence 3.6 Soient $f \in \mathcal{L}^P(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ avec $p, q \geq 1$ exposants conjugués. On a alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Théorème 3.7 (Inégalité de Minkowski) Soient $p \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{L}^P(\mu)$. Alors : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 3.8 Soit $p \geq 1$, on pose $L^P(\mu) := \mathcal{L}^P(\mu) / \{ \|.\|_p = 0 \}$. Alors $(L^P(\mu), \|.\|_p)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 3.9 (Riesz-Fisher) Pour tout $p \geq 1$, $(L^P(\mu), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

2. Cas particulier L^2

Proposition 3.10 L'application $\langle .,. \rangle : (f,g) \longmapsto \int f \bar{g} \, d\mu$ est un produit scalaire sur $L^2(\mu)$. Muni de ce produit scalaire, $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert.

Exemples 3.11
- $((\delta_{n,m})_m)_n$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$
- $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$ où $e_n : x \longmapsto e^{2i\pi n x}$.

Définition 3.12 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids sur I, toute fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout n, $\int_I |x|^n \rho(x) \, dx < +\infty$.
On note $L^2(I, \rho)$ les fonctions de carrés intégrables pour ρdx sur I.

Proposition 3.13 Soit $(P_n)_n$ la suite de polynômes orthonormaux obtenue à partir de $(x^n)_n$ avec ρ une fonction poids telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant $\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, dx < +\infty$.
Alors, $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$. développement 1

IV - Produit de convolution

Définition 4.1 Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g la fonction : $f \star g\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, g(x-t)\, dt$, lorsque celle-ci est définie.

Proposition 4.2 Lorsqu'il est défini, le produit de convolution est commutatif.

Théorème 4.3

i) Soient p, q exposants conjugués alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a $f \star g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

ii) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f \star g$ est défini p.p. et $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$

Application

Lemme 4.4 Soit $(f_n)_n$ une approximation de l'unité et soit $f \in C^0_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors : $(f_n \star f)_n$ converge uniformément vers f.

Lemme 4.5 On considère $(p_n)_n$ l'approximation de l'unité définie par $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{|t| \leqslant 1}$ où $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt$. Soit $f \in C^0$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$ alors pour tout n, $f \star p_n$ est polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$.

Théorème 4.6 (Weierstrass) Soit $f \in C^0([a,b])$. Il existe alors $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge vers f.

développement 2