Dreveton, Labhouz
Gourdon
Beck & Malick
Rouvière (dev 1)
Rombaldi exo (dev 2)

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I - Fonctions monotones d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définitions

Définition 1.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dite croissante (resp. décroissante) si pour tous $x, y \in I$, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Si f est croissante ou décroissante, on dit alors que f est monotone.

Dans le cas où l'inégalité entre $f(x)$ et $f(y)$ est stricte, on parle de stricte croissance / stricte décroissance / stricte monotonie.

Exemples 1.2
- une fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$
- une fonction affine $x \longmapsto ax+b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est monotone avec un sens de variation dépendant de a

Remarque 1.3 Il existe des fonctions monotones sur aucun intervalle.

← f croissante $\Leftrightarrow$ $-f$ décroissante

2. Régularité et caractérisations

Proposition 1.4 L'ensemble des fonctions croissantes (resp. décroissantes) est stable par addition, et par multiplication par un scalaire positif.

La composition de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante.

Contre-exemple 1.5
La fonction $x \longmapsto x$ est croissante, toutefois la fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas croissante ni même monotone.
Donc la monotonie n'est pas stable par produit.

Proposition 1.6 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :
(i) f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I
(ii) f est strictement croissante si et seulement si $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide et f est croissante

Contre-exemple 1.7
La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$ est une fonction strictement croissante, toutefois $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0.
Donc la stricte croissance ne se caractérise pas par $f' > 0$.

Proposition 1.8 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone. Alors, f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Contre-exemple 1.9
Soit $f : x \in [0,2] \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
Alors $f([0,2]) =]0,2]$ mais f n'est pas continue.

Proposition 1.10 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective sur I si et seulement si f est strictement monotone sur I.

Proposition 1.11 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Théorème 1.12 (de la limite monotone) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Notons a et b les extrémités de I, on a alors :
(i) f admet une limite à gauche en b, finie si f est majorée
(ii) f admet une limite à droite en a, finie si f est minorée
(iii) f admet en tout point $x \in]a,b[$ une limite finie à droite et à gauche, et $f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+)$

Théorème 1.13 [admis] Une application monotone est dérivable presque partout.

Théorème 1.14 (Méthode de Newton) Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a)<0<f(b)$ et $f' > 0$, et $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors :
(i) f s'annule en un unique point c et il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x_0 \in I = [c-\alpha, c+\alpha]$ la suite converge quadratiquement vers c
(ii) si $f'' > 0$, ce qui précède est vrai pour (i) et $x_{n+1} - c \sim \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(c)} (x_n - c)^2$

développement 1

II - Fonctions convexes

1. Généralités dans le cadre de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1 Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est une partie convexe si pour tous $x, y \in C$, $[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\} \subset C$.

Définition 2.2 On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, une application $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si : pour tous x, y C et tout $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Proposition 2.3 Soit $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est continue et dérivable dans toute direction.

Proposition 2.4 Soient C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une fonction convexe

(ii) $\forall x, y \in C$, $f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

(iii) $\forall x, y \in C$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$

(iv) $\forall x \in C$, $H_f(x)$ est une matrice (symétrique) positive

Exemples 2.5

- L'application $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\|^2$ est une fonction strictement convexe
- soit $A \in S_n$, alors $x \longmapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive

Proposition 2.6 Soient C un convexe non vide et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement convexe. Alors, il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ minimisant f sur C.

2. Propriétés propres au cadre $\mathbb{R}$

Définition 2.7 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si : $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Remarque 2.8 Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Il suffit donc de traiter le cas convexe pour traiter à la fois les cas convexe et concave.

Proposition 2.9 (Inégalité des cordes) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$ alors : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$

Proposition 2.10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée alors f est constante.

Contre-exemple 2.11
La fonction $f : x \in [0,1] \longmapsto x^2$ est une fonction convexe, majorée par 1 et non constante

Proposition 2.12 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$ et vérifient $f'_g \leqslant f'_d$.

Corollaire 2.13 L'ensemble des points de non dérivabilité d'une fonction convexe est au plus dénombrable.

Définition 2.14 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction. On dit que f est log-convexe si $\log(f)$ est convexe.

Proposition 2.15 Une fonction log-convexe est convexe.

Contre-exemple 2.16
La réciproque est fausse : $id : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction convexe mais n'est pas log-convexe, car log-concave

Théorème 2.17 (de Bohr - Mollerup) Une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les trois conditions suivantes, coïncide avec la fonction Γ :

(i) $f(1) = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = x f(x)$

(iii) f est logarithme convexe

développement 2