Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Gourdon
Dreveton – Lhabouz
Tauvel
Dantzer (dev 1)
Beck... (dev 2)

I – Prolongements : aspects topologiques

1. Prolongement par continuité

Définition 1.1 Soient (X, d), (Y, d') espaces métriques. Soient $D \subset X$, $a \in D$ et $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow Y$ une fonction continue.

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$, la fonction g définie sur D par $g_{|D\setminus\{a\}} = f$ et $g(a) = \ell$, est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

Exemples 1.2

- la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{\sin x}{x}$, est prolongeable par continuité en 0, avec 1 pour valeur en 0. La fonction obtenue est appelée sinus cardinal.
- la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto e^{-1/x^2}$, est prolongeable par continuité en 0, avec 1 pour valeur en 0.

2. Prolongement par densité

Proposition 1.3 Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques, A une partie dense dans X. Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ continues telles que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$.

Proposition 1.4 Soient (X, d), (Y, d') des espaces métriques avec (Y, d') complet, A une partie dense de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue $\tilde{f}$ sur X qui prolonge f. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

développement 1

Proposition 1.5 Soient E un espace vectoriel normé, E_1 un sous-espace dense de E et F un espace de Banach. Une application linéaire continue définie sur E_1 à valeurs dans F se prolonge de manière unique sur E en une application linéaire continue, de même norme.

Application 1.6 Construction de l'intégrale de Riemann par densité des fonctions en escalier sur $[a, b]$ dans $C^0_m([a, b])$.

Application 1.7 Prolongement de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

II – Prolongements : aspects différentiels

1. Prolongement et dérivation

Théorème 2.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $c \in I$ tel que f soit dérivable sur $I \setminus \{c\}$ et que f' admette une limite ℓ en c. Alors, f est dérivable en c et vérifie $f'(c) = \ell$.

Remarque 2.2 On note qu'alors f' est continue en c.

Corollaire 2.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, n fois dérivable sur $I \setminus \{c\}$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{x \to c} f^{(k)}(x) = \alpha_k$. Alors f est n fois dérivable en c et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}(c) = \alpha_k$.

2. Équations différentielles

Définition 2.4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = f(t, y)$.

Définition 2.5 Soit (J, y) une solution de (E), $(\tilde{J}, \tilde{y})$ est un prolongement de (J, y) si c' est une solution de (E) telle que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{y}_{|J} = y$.

Définition 2.6 Une solution est dite maximale si elle ne peut être prolongée. Si son espace de définition est I, elle est dite globale.

Théorème 2.7 (de Cauchy - Lipschitz) Si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable alors il existe une unique solution maximale de tout problème de Cauchy.

Exemple 2.8
$(E) : y' = y^2$
Les solutions sont les fonctions :

$t \mapsto 0 \qquad t \in]-\infty, \alpha[\mapsto \dfrac{1}{\alpha - t} \qquad t \in]\alpha, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{\alpha - t}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Les solutions non nulles sont maximales mais pas globales.

III - Prolongement et holomorphie

1. Prolongement analytique

Théorème 3.1 (prolongement analytique) Soit U un ouvert connexe et soit f analytique sur U. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $f \equiv 0$ sur U
- $f \equiv 0$ sur un voisinage de $a \in U$
- $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Corollaire 3.2 Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g analytiques sur U. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, $f = g$ sur U.

Application 3.3 La fonction caractéristique de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $t \mapsto e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$.

Exemple 3.4
Supposons $0 \in U$. Il n'existe pas $f \in \mathcal{A}(U)$ telle que : $\forall n \geq 1, f(1/n) = f(-1/n) = \frac{1}{n}$.

2. Application : lacunes de Hadamard

Définition 3.5 Soient S une série entière de rayon de convergence dont on note f la somme sur $D(0,R)$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$. On dit que z est un point régulier de S s'il existe un ouvert Ω contenant $D(0,R) \cup \{z\}$ et une fonction g analytique sur Ω telle que $f = g$ sur $D(0,R)$.

Dans le cas contraire, on dit que z est singulier.

Lemme 3.6 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $D(0,1) \cup \{1\}$ et soit $Q(X) = \dfrac{X^M + X^{M+1}}{2}$.
Il existe $\rho > 1$ tel que $Q(D(0,\rho)) \subset \Omega$.

Définition 3.7 Une suite réelle $(p_n)_n$ est dite lacunaire s'il existe $c > 1$ tel que pour tout n, $p_{n+1} \geq c p_n$.

Lemme 3.8 Soit $(p_n)_n$ une suite lacunaire d'entiers et $\sum a_n z^{p_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors 1 est un point singulier.

Théorème 3.9 Sous les hypothèses du lemme précédent, tous les points de S^1 sont singuliers.

3. Application : polynômes orthogonaux

Définition 3.10 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.
On note $L^2(I, \rho)$ l'espace préhilbertien associé, qui définit un Hilbert.

Définition - Proposition 3.11 Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux tels que $\deg P_n = n$. On appelle ceux-ci les polynômes orthogonaux associés à ρ.

Théorème 3.12 Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

développement 2