Gourdon
Dantzer
Briane - Pagès
Appel (dev 1)

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Dans cette leçon (X,d) désigne un espace métrique non vide.

I. Généralités sur les espaces complets

1. Suites de Cauchy

Définition 1.1 Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p,q > n_0$, $d(x_p,x_q)<\varepsilon$.

Proposition 1.2 Une suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse.

Proposition 1.3 Une suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.4 On dit que (X,d) est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge.

Exemples 1.5
- $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet
- $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet

Exemple 1.6

Proposition Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive, bornée, strictement croissante sur un voisinage de 0 et vérifiant $\psi(0)=0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\psi(|X_n - X|)] = 0$.

Proposition La convergence en probabilité est issue d'une métrique d définie par $(X,Y) \longmapsto \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$. De plus, (L^0, d) est un espace métrique complet.

développement 1

2. Premières propriétés des espaces complets

Proposition 1.7 Soit A une partie de X et d_A la distance induite par d sur A alors (A, d_A) est complet si et seulement si A est une partie fermée de X.

Proposition 1.8 Soient $(X_1,d_1), \dots, (X_n,d_n)$ des espaces métriques. Alors l'espace $X_1 \times \dots \times X_n$, muni de la métrique produit, est complet si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, (X_i,d_i) est complet.

Conséquence 1.9 L'espace $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ est complet.

Théorème 1.10 (des fermés emboîtés) Supposons (X,d) complet. Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés de X non vides, décroissante au sens de l'inclusion et vérifiant que $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\bigcap_n F_n$ est non vide et il existe $x \in E$ tel que l'on ait $\bigcap_n F_n = \{x\}$.

Application 1.11 Soient (X_1,d_1), (X_2,d_2) des espaces métriques complets avec (X_1,d_1) complet. Soient $f : X_1 \longrightarrow X_2$ continue et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de X_1 dont le diamètre tend vers 0. Alors $f(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n f(F_n)$.

II. Espaces de Banach

1. Définition et premiers exemples

Définition 2.1 Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit de Banach si la métrique issue de $\|.\|$ en fait un espace complet.

Proposition 2.2 On considère X un ensemble non vide et $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X sur E et $\|.\|_\infty$ la norme uniforme. Si E est de Banach alors $(\mathcal{B}(X,E), \|.\|_\infty)$ est de Banach.

Exemples 2.3
- $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est un espace de Banach
- $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach
- $C^0([a,b],\mathbb{R})$ est un espace de Banach

Proposition 2.4 Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Si F est de Banach alors $(\mathcal{L}(E,F), |||.|||)$ est un espace de Banach où $|||.|||$ est la norme subordonnée.

Proposition 2.5 Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

2. Les espaces L^p

On se place pour tout le paragraphe dans un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 2.6 Pour tout $p \geq 1$, on définit $\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : E \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $\int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$ et $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable $|\ \|f\|_\infty < +\infty\}$.

Proposition 2.7 Si $\mu(E) < +\infty$ alors pour $p \leq q$, $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$.

Notation 2.8 Pour $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $p \geq 1$, $\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ avec la convention $(+\infty)^{1/p} = +\infty$.

Théorème 2.9 (Inégalité de Hölder) Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables et $p, q \geq 1$ où q est l'exposant conjugué de p. Alors : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ alors $fg \in \mathcal{L}^1$.

Théorème 2.10 (Inégalité de Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 2.11 Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on pose $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \{$égalité μ-p.p$\}$. Alors $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 2.12 (Riesz - Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

III - Théorèmes fondamentaux de complétude

1. Théorème de prolongement

Théorème 3.1 Soient (X, d) un espace métrique, (X', d') un espace métrique complet et A une partie dense de X. Toute application uniformément continue $f : A \longrightarrow X'$ se prolonge de manière unique en unique application continue sur X. De plus, ce prolongement est uniformément continu.

développement 2

Proposition 3.2 Soient E un espace vectoriel normé, E_1 un sous-espace dense et F un espace de Banach. Tout $f \in \mathcal{L}(E_1, F)$ se prolonge de manière unique en une application $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$. De plus, $|||f||| = |||\tilde{f}|||$.

Application 3.3 Le prolongement de la transformation de Fourier sur L^2.

2. Théorème de point fixe de Picard

Théorème 3.4 (du point fixe) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors, f admet un unique point fixe.
De plus, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n, vérifie qu'elle converge vers ce point fixe avec vitesse géométrique.

Application 3.5 (Méthode de Newton) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$. Considérons la suite récurrente $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On obtient alors :

(i) f s'annule en unique point c et il existe $\alpha > 0$ tel que, dès lors que $x_0 \in I = [c - \alpha, c + \alpha]$, la suite converge quadratiquement vers c

(ii) si $f'' > 0$ alors le résultat du (i) est vrai pour $I = [c, b]$, $(x_n)_n$ est une suite décroissante et $x_{n+1} - c \sim \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(c)} (x_n - c)^2$

Application 3.6 (Théorème d'inversion locale) Soit $f : U \longrightarrow F$ où U ouvert de E un espace de Banach et F un espace de Banach. Si f est de classe C^1 et $df(x_0)$ est inversible alors il existe V voisinage ouvert de x_0 et W voisinage ouvert de $f(x_0)$ tels que $f : V \longrightarrow W$ soit un C^1-difféomorphisme.