Gourdon
Beck, Malick, ...
Tauvel

Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

On considère (E,d) un espace métrique.

I – Notion de connexité

1. Définition et caractérisations

Théorème 1.1 Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides
(ii) il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides
(iii) les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E
(iv) toute application de E dans $\{0,1\}$ est constante si elle est continue

Définition 1.2 Un espace métrique vérifiant l'une des assertions précédentes est dit connexe.

Définition 1.3 Une partie A de E est connexe si elle l'est pour la topologie induite.

Exemples 1.4
- $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$ car : $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$
- $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe car $\det : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1,1\}$ est une surjection continue

2. Propriétés des espaces connexes

Théorème 1.5 Soit $f : (E,d) \longrightarrow (F,d')$ une application continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Proposition 1.6 Soit A une partie de (E,d) espace connexe. Si une partie de E vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est une partie connexe.

Remarque 1.7 On obtient en particulier que $\bar{A}$ est connexe.

Proposition 1.8 Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de (E,d) qui vérifie qu'il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Corollaire 1.9 La réunion de parties connexes d'intersection non vide est connexe.

Contre-exemple 1.10
$\{0\}$ et $\{1\}$ sont des connexes de $\mathbb{R}$ mais $\{0,1\}$ n'est pas connexe
on a ici $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$

Proposition 1.11 Soient $(E_1,d_1), \dots, (E_n,d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). Alors l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

3. Connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 1.12 Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Application 1.13 (théorème des valeurs intermédiaires) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.14
$\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe car $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est une application continue

II – Raffinements de la connexité

1. Composantes connexes

Définition 2.1 On dit que deux points x, y de E sont connectés s'il existe une partie connexe C telle que $x \in C$ et $y \in C$.

Proposition 2.2 La relation de connexion entre deux points est une relation d'équivalence.

Définition - Proposition 2.3 Pour tout $x \in E$, on note $C(x)$ sa classe d'équivalence. On a alors $C(x)$ est une partie connexe, que l'on appelle composante connexe de x.

Proposition 2.4 Soit $x \in E$, alors $C(x)$ est la plus grande partie connexe de E contenant x et est fermée.

Exemple 2.5
$\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

2. Connexité par arcs

Définition 2.6 On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ continue. L'image $\gamma([0,1])$ s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine et $\gamma(1)$ l'extrémité.

Définition 2.7 On dit que (E,d) est connexe par arcs si pour tout $x, y \in E$, il existe un arc inclus dans E, d'origine x et d'extrémité y.

Théorème 2.8 Un espace connexe par arcs est connexe.

Contre-exemple 2.9
$T := \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_+) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_-^*)$ est connexe non connexe par arcs

développement 1

Théorème 2.10 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si Ω est connexe par arcs.

Application 2.11 On a : $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs.

II - Applications de la connexité

1. Calcul différentiel

Théorème 3.1 (Darboux) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 (inégalité des accroissements finis) Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application différentiable, avec E et F des espaces vectoriels normés. Pour tous $a, b \in E$ tels que $[a,b] \subset U$, on a : $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}} \|b-a\|$.

Application 3.3 Soit U un ouvert de E espace vectoriel normé. Alors si U est connexe, f est constante sur U si et seulement si pour tout $x \in U$, $df(x) = 0$.

2. Analyse complexe

Théorème 3.4 (principe de prolongement analytique) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f analytique sur Ω et $a \in \Omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f \equiv 0$ sur Ω
- f est identiquement nulle dans un voisinage de a
- $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$

Théorème 3.5 (principe des zéros isolés) Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f analytique sur Ω. Si $\{z \mid f(z) = 0\}$ possède un point d'accumulation sur Ω alors $f \equiv 0$.

Théorème 3.6 Soit γ un lacet C^1 par morceaux. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$, on définit l'indice $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$. Alors l'application ind_γ est continue à valeurs entières.

Théorème 3.7 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f continue sur U. Alors f possède une primitive dans U si et seulement si pour tout lacet C^1 par morceaux γ dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Théorème 3.8 (Cauchy) Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ un lacet C^1 par morceaux tracé dans Ω. Alors :

- $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$, $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0}\,dw$

Conséquence 3.9 Les notions d'analyticité et d'holomorphie coïncident sur les domaines de $\mathbb{C}$.

Application 3.10 Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\varphi_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$

développement 2