Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Grifone
Rombaldi
Perrin (dev 1)
Isenmann - Pecatte (dev 2)

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

I - Formes quadratiques réelles

1. Définitions et généralités

Définition 1.1 Une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite forme quadratique s'il existe une application bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$.

Définition - Proposition 1.2 Sous les hypothèses, φ est unique et vérifie pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$.

On dit que φ est la forme polaire de q.

Exemple 1.3
$q : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto \int_0^1 P(x)^2\, dx$

la forme polaire associée est $\varphi : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx$.

Définition 1.4 On appelle rang, noyau, matrice d'une forme quadratique q, le rang, le noyau, la matrice de la forme polaire associée à q.

Exemple 1.5
$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3$

On a :

$$\mathrm{Mat}_{(e_i)_i}(q) = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 3 & 4 \\ -3/2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

q est non dégénérée

Définition 1.6 On appelle cône isotrope de q l'ensemble $I(q) := \{x \in E \mid q(x) = 0\}$.

Remarque 1.7 On a alors $N(q) \subset I(q)$ où $N(q)$ désigne le noyau de q.

2. Réduction des formes quadratiques

Définition 1.8 Une base $\mathcal{B} = (e_i)_i$ est dite orthogonale pour une forme quadratique si pour tous $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Elle est dite orthonormée, si elle vérifie de plus pour tout i, $\varphi(e_i, e_i) = 1$.

Remarque 1.9 Cela revient à dire que $q(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i, e_i)\, x_i^2$ où $x = \sum x_i e_i$ et donc $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ où $(e_i^*)_i$ désigne la base duale de $\mathcal{B}$.

Théorème 1.10 Toute forme quadratique sur E (de dimension finie) admet une base orthogonale.

Théorème 1.11 (réduction de Gauss) Pour toute forme quadratique non nulle q, il existe $r \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\ell_1, \dots, \ell_r \in E^*$ indépendantes tels que :
$\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)$.

Théorème 1.12 Avec les notations précédentes, $\mathrm{rg}(q) = r$

Exemple 1.13

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

Définition 1.14 Une forme quadratique q sur E est dite positive (resp. définie positive) si $q(x) \geqslant 0$ (resp. > 0) pour tout $x \in E$ (resp. $E \setminus \{0\}$).

Théorème 1.15 (Sylvester) Soit q une forme quadratique, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a : $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ où r est le rang de q. De plus, p est indépendant du choix de la base.

On appelle $(p, r-p)$ la signature de q.

Application 1.16 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et a un point critique. On note $r = \operatorname{tr}(d^2f(a))$ et $s = \det(d^2f(a))$. Alors :

- si $s > 0$ et $r > 0$, a est un minimum local
- si $s > 0$ et $r < 0$, a est un maximum local

Corollaire 1.17 Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

II _ Formes quadratiques sur un espace euclidien

On suppose E euclidien et on note $\langle .,. \rangle$ son produit scalaire.

1. Diagonalisation dans une base orthonormée

Théorème 2.1 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt) Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Proposition 2.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x, y \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\|u(x)\| = \|x\|$
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ alors ${}^tMM = I_n$

Définition 2.3 Si l'une des assertions est vérifiée, on dit que u est une isométrie. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries et $SO(E)$ le sous-groupe de $O(E)$ des isométries de déterminant 1.

Théorème 2.4 Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Lemme 2.5 Supposons $n \geq 3$. Soit τ_1, τ_2 des réflexions, il existe alors σ_1, σ_2 des renversements tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 2.6 Le groupe $SO(E)$ est engendré par les renversements.

développement 1

Théorème 2.7 On a : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

2. Orthogonalisation simultanée

Théorème 2.8 Soit q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base qui soit orthogonale pour $\langle .,. \rangle$ et q à la fois.

Corollaire 2.9 Soit q une forme quadratique sur E de signature (r, s) et de matrice M dans une base $\mathcal{B}$ de E alors :

- on peut construire une base orthogonale de q formée de vecteurs propres de M
- r est le nombre de valeurs propres strictement positives, s le nombre de valeurs propres strictement négatives

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $q_S : x \mapsto {}^txSx$ et $E_S := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, q_S(x) \leq 1\}$.

Proposition 2.10 En notant $\mu(S) = (\det S)^{-1/2}$ et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, obtient : $\operatorname{Vol}(E_S) = \mu(S) \operatorname{Vol}(B)$

Proposition 2.11 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.12 (John – Loewner) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

développement 2

III _ Coniques

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

Définition 3.1 Soient q une forme quadratique et φ une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble C des points v de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $q(v) + \varphi(v) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ fixé.

Remarque 3.2 Si (e_1, e_2) est la base canonique et $v = (x, y)$. L'équation d'une conique est du type : $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y = k$.

Remarque 3.3 D'après le théorème 2.8, il existe une base (v_1, v_2) orthogonale à la fois pour q et $\langle .,. \rangle$, orthonormée pour $\langle .,. \rangle$. Si $v = x' v_1 + y' v_2$ l'équation de la conique devient : $ax'^2 + by'^2 - 2r x' - 2s y' = k$.

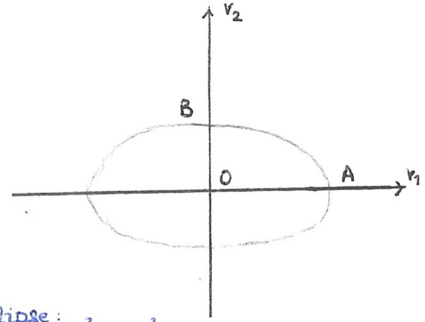
Définition 3.4 Sous les hypothèses précédentes, v_1 et v_2 sont appelés directions principales de la conique.

Théorème 3.5 Soit q une forme quadratique intervenant dans la conique ; on note $h = k - (r/a)^2 - (s/b)^2$

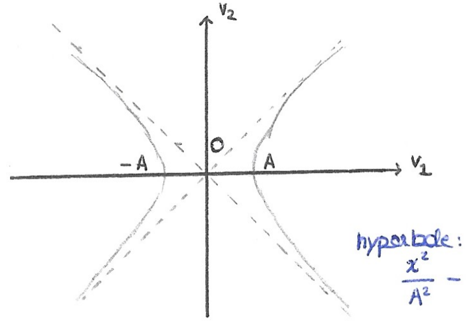
- si $\text{sign}(q) = (2, 0)$:
  - si $h < 0$, $C = \emptyset$
  - si $h = 0$, C est réduite à un point
  - si $h > 0$, C est une ellipse de centre $O = \left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)$

- si $\text{sign}(q) = (1, 1)$:
  - si $h \neq 0$, C est une hyperbole
  - si $h = 0$, C est réduit aux droites d'équation $\pm\sqrt{|a/b|}\, x = y$

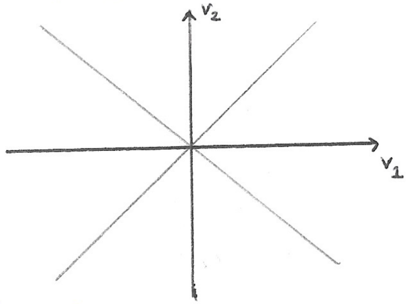
- si $\text{sign}(q) = (1, 0)$:
  - si $s \neq 0$, C est une parabole
  - si $s = 0$,
    α $h < 0$: $C = \emptyset$ $\quad\alpha$ $h = 0$: $C = \{x = 0\}$ $\quad\alpha$ $h > 0$: $C = \left\{x = \pm\sqrt{\frac{h}{a}}\right\}$



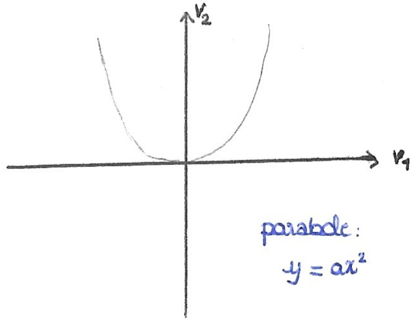
ellipse : $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} =$



hyperbole : $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$



$\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 0$



parabole : $y = ax^2$