# Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (dim. finie)

Rombaldi
Szpirglas
Perrin
Isenmann P. (dev 2)

On considère $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie.

## I. Adjoint d'un endomorphisme

### 1. Définition et premières propriétés [Rom] [Szp]

**Lemme 1.1** Pour tout $\ell \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\ell(x) = \langle x, a \rangle$.

**Théorème 1.2** Pour tout endomorphisme $u$ de $E$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle$.

**Définition 1.3** Sous les hypothèses précédentes, on dit que $u^*$ est l'adjoint de $u$.

**Proposition 1.4** Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $G$ la matrice de Gram associée. Alors, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = G^{-1}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, G$.

**Remarque 1.5** Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors dans cette base $u$ et $u^*$ ont leurs matrices transposées l'une de l'autre

**Proposition 1.6** Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors :

- $u^*$ admet $u$ pour adjoint : $u^{**} = u$
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha u + v)^* = \alpha u^* + v^*$
- $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$
- si $u$ est inversible alors $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

**Proposition 2.7** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors :

- pour $H$ s.e.v. de $E$, $H$ est stable par $u \iff H^\perp$ est stable par $u^*$
- $\ker u^* = (\mathrm{im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{im}\, u^* = (\ker u)^\perp$

### 2. Endomorphismes remarquables [Rom]

**Définition 1.8** Un endomorphisme $u$ est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire i.e. pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. On note $u \in O(E)$.

**Exemples 1.9**

$id_E$ et $-id_E$ sont orthogonaux

les rotations et les symétries orthogonales

**Proposition 1.10** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si et seulement si $u$ est inversible et $u^* = u^{-1}$.

Matriciellement, cela signifie que dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée, si on note $A$ la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$, ${}^tA.A = A.{}^tA = I_n$.

**Définition 1.11** Un endomorphisme $u$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

**Définition 1.12** Un endomorphisme $u$ est dit antisymétrique si $u^* = -u$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble associé.

**Exemple 1.13**

pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u + u^* \in \mathcal{S}(E)$

**Définition 1.14** Un endomorphisme $u$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

## II. Endomorphismes orthogonaux

### 1. Structure de O(E) [Per]

**Théorème 2.1** L'espace $O(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

**Proposition 2.2** $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ et $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$ en est un sous-groupe distingué d'indice 2.

**Proposition 2.3** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si et seulement si l'image de toute b.o.n par $u$ est une b.o.n.

**Définition 2.4** Soit $u$ une symétrie orthogonale. On considère $E^+ = \ker(u - id_E)$ et $E^- = \ker(u + id_E)$ qui vérifient $E = E^+ \oplus E^-$.

On dit alors que :

- $u$ est une réflexion si $\dim E^- = 1$
- $u$ est un renversement si $\dim E^-$

**Théorème 2.5** Toute isométrie $u$ est le produit de $r = rg(u - id)$ réflexions. En particulier, les réflexions engendrent $O(E)$.

**Théorème 2.6** Si $n \geq 3$, tout $u \in SO(E)$ est le produit d'au plus $n$ retournements. En particulier, les retournements engendrent $SO(E)$.

**Lemme 2.7** Soient $n \geq 3$ et $\tau_1, \tau_2$ des réflexions. Alors $\tau_1 \tau_2$ est le produit de deux renversements.

développement 1

## 2. Réduction [Rom]

**Lemme 2.8** Soit $u \in O(E)$ alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.

**Lemme 2.9** Soit $u \in O(E)$. Il existe des s.e.v. $P_1, \dots, P_r$ de $E$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par $u$ et tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} P_k$

**Théorème 2.10** Soit $u \in O(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix}$$

où :

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_k \in \,]0, 2\pi[\, \setminus \{\pi\}, \ \forall k \in [\![1, r]\!]$$

$p, q, r \in \mathbb{N}$ et $p + q + 2r = n$

**Corollaire 2.11** Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix}$.

# III - Endomorphismes auto-adjoints

## 1. Premières propriétés [Rom]

**Proposition 3.1** L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

**Définition 3.2** Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (resp. défini positif) si $u \in \mathcal{S}(E)$ et pour tout $x$, $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. pour tout $x \neq 0$, $\langle x, u(x) \rangle > 0$). On note $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$).

**Proposition 3.3** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp\, u \subset \mathbb{R}_+^*$).

**Lemme 3.4** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}$.

**Lemme 3.5** Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda \neq \mu \in Sp(u)$. Alors $E_\lambda, E_\mu$ sont orthogonaux.

## 2. Théorème spectral et applications [Rom]

**Théorème 3.6** (théorème spectral) Tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

**Corollaire 3.7** Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

**Application 3.8** Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

**Théorème 3.9** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

**Théorème 3.10** (décomposition polaire) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, cette décomposition est unique.

développement 2

**Lemme 3.11** Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\rho(A) = \|A\|_2$.

**Théorème 3.12** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.