Mansuy
Beck - Malick - Peyré
Rombaldi

Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Préliminaires théoriques

1. Études d'endomorphismes [Man]

Définition 1.1 On appelle polynôme minimal de u, l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ générateur de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$.

Proposition 1.2 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutant. Alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. En particulier, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.

Théorème 1.3 (lemme des noyaux) Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On pose $P := P_1 \dots P_r$. Alors : $\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$.

Conséquence 1.4 Si $\pi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ décomposition en irréductibles. On a la décomposition en sous-espaces u-stables $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker (u - \lambda_k \mathrm{id})^{\alpha_k}$.

Définition 1.5 On définit le polynôme caractéristique $\chi_u = \det(u - X\mathrm{id})$.

Proposition 1.6 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.

Théorème 1.7 (Cayley - Hamilton) Le polynôme caractéristique de u annule u.

2. Noyaux itérés [Man]

Proposition 1.8 La suite $(\ker u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus, pour tout k

$\dim \ker u^{k+1} = \dim \ker u^k + \dim(\operatorname{Im} u^k \cap \ker u)$.

Proposition 1.9 La suite $(\dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k)_k$ est décroissante.

Application 1.10 On a $\dim \ker u^2 = 2 \dim \ker u$ si et seulement si $\ker u \subset \operatorname{Im} u$.

II. Trigonalisation

1. Caractérisation des endomorphismes trigonalisables [BMP]

Définition 2.1 L'endomorphisme u est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Définition 2.2 Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 2.3 Soit M trigonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Alors, si $M = PTP^{-1}$, les coefficients diagonaux de T sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Donc : $\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\det T = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Théorème 2.4 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable
- u admet un polynôme annulateur scindé
- π_u est scindé
- χ_u est scindé

Corollaire 2.5 Lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Application 2.6 Si u est trigonalisable alors $\operatorname{Sp}(u^2) = \operatorname{Sp}(u)^2$.

Contre-exemple 2.7

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non trigonalisable, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) = \{-1\}$.

2. Trigonalisation simultanée [Gou] [Mai]

Définition 2.8 Une famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite cotrigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $i \in I$, $Mat_{\mathcal{B}}(u_i)$ est triangulaire supérieure.

Exemple 2.9
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ alors A et B admettent un vecteur propre commun et sont cotrigonalisables

Proposition 2.10 Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes commutant deux à deux et trigonalisables. Alors $(u_i)_i$ est cotrigonalisable.

développement 1

Proposition 2.11 Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont cotrigonalisables alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Contre-exemple 2.12
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trigonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais pas leur somme

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais pas leur produit

III - Endomorphismes nilpotents

1. Caractéristiques [Rom]

Définition 3.1 Un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. On appelle alors indice de nilpotence le plus petit entier vérifiant cette propriété.

Exemple 3.2
$D_n : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$, $P \longmapsto P'$ est nilpotente d'indice $n+1$

Proposition 3.3 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- si u et v commutent et sont nilpotents alors $u+v$ est nilpotent
- si u et v commutent, et u nilpotent alors $u \circ v$ est nilpotent

Théorème 3.4 Supposons $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Alors u est nilpotent si et seulement si $Sp(u) = \{0\}$.

Contre-exemple 3.5
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $Sp(A) = \{0\}$, A non nilpotent

Théorème 3.6 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u nilpotent
- $\chi_u(X) = X^n$
- $\exists r \in [\![1, n]\!]$, $\pi_u(X) = X^r$
- u trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$

Corollaire 3.7 Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure.

Théorème 3.8 Supposons $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, alors u est nilpotent si et seulement si pour tout k, $tr(u^k) = 0$.

Application 3.9 (théorème de Burnside) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est fini.

développement 2

Proposition 3.10 Soit $(u_1, \dots, u_N)$ une famille d'endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux alors $u_1 \dots u_N = 0$.

2. Application : décomposition de Dunford [Rom]

Théorème 3.11 Supposons que π_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe alors un unique couple

(n,d), avec n nilpotente et d diagonalisable, tel que $u = n+d$ et $n \circ d = d \circ n$.

Contre-exemple 3.12

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford

Application 3.13 Soit $M = N + D$ une décomposition de Dunford, on a alors :

$$e^M = e^N e^D = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{N^k}{k!} \right) P \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix} P^{-1}.$$