Leçon 152 : Déterminants. Exemples et applications.

Gourdon, Algèbre
Rombaldi
Dreveton - Chabouz
Gourdon, Analyse (III.2)
Isenmann - Pecatte (dev 1 et 2)

Dans cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I. Construction du déterminant

1. Formes m-linéaires alternées

Définition 1.1 Une forme m-linéaire sur E est une application $\varphi : E^m \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, pour tous $(x_i)_{i \neq k} \in E^{m-1}$, l'application $\varphi_k : x \in E \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m)$ est linéaire.

On dit que φ est alternée si $\varphi(x_1, \dots, x_m) = 0$ pour tout $(x_i)_i \in E^m$ pour lequel il existe $j \neq k$ tels que $x_j = x_k$.

Théorème 1.2 Une forme m-linéaire φ est alternée si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

Remarque 1.3 Si φ est m-linéaire alternée, pour toute famille liée $(x_i)_i \in E^m$, on a $\varphi(x_1, \dots, x_m) = 0$. Il en résulte que $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ est inchangé si on ajoute à l'un des vecteurs x_k une combinaison linéaire des autres vecteurs.

2. Déterminant

Théorème 1.4 L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées est de dimension 1, engendré par l'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i), i}$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k}\, e_i$.

Définition 1.5 Sous les hypothèses précédentes, on dit que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du n-uplet de vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème 1.6 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Alors $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

En particulier, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$.

Théorème 1.7 Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

(ii) pour toute base $\mathcal{B}$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$

(iii) il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$

Définition-proposition 1.8 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de u et on le note $\det u$.

Proposition 1.9

- soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ alors $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$
- $\det \mathrm{id}_E = 1$
- soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors ($u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$) et $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$

Définition 1.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, le déterminant des vecteurs colonne de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on le note $\det A$.

Proposition 1.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors :

- $\det A = \det {}^tA$
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det \lambda A = \lambda^n \det A$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$
- si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\det A = \det u$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$
- deux matrices semblables ont même déterminant

3. Propriétés analytiques

Proposition 1.12 L'application $M \longmapsto \det M$ est de classe C^∞.

Application 1.13 L'espace $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert tandis que $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé.

Proposition 1.14 La différentielle du déterminant est $d(\det)(M)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}\, M . H)$.

Lemme 1.15 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{vol}(E_S) = \mu(S)\,\mathrm{vol}(B)$ où E_S est l'ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_S(x) = {}^t x S x \leq 1\}$, $\mu : A \longmapsto (\det A)^{-1/2}$ et $B = \bar{B}(0,1)$.

Proposition 1.16 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.17 (John – Löwner) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

développement 1

II _ Méthodes de calcul

1. Méthodes de calcul direct

Proposition 2.1 Si A est triangulaire alors $\det A$ est le produit des coefficients diagonaux de A.

Proposition 2.2 (déterminant par blocs) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ alors $\det M = \det A . \det D$

Définition 2.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on appelle mineur d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle cofacteur.

Proposition 2.4 (développement par rapport à une ligne ou à une colonne) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$

2. Déterminants standard

Définition 2.5 Soient $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On définit la matrice de Vandermonde associée

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.6 On a : $\det V(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Lemme 2.7 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Alors u est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Théorème 2.8 (Burnside) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ de sorte que pour tout $A \in G$, $A^N = I_n$. Alors G est fini.

développement 2

Définition 2.9 Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On définit la matrice circulante associée

$$C(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_1 & \cdots \; a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.10 On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors, sous les hypothèses précédentes, on obtient $\det C(a_0,\dots,a_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$.

III _ Applications ...

1. ... à l'algèbre linéaire

Définition 3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque 3.2 Ce déterminant bien que n'étant pas défini sur un corps peut être défini par la formule de la proposition 2.4, il garde les mêmes propriétés.

Exemple 3.3
si $n = 2$, $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}\, A . X + \det A$

Application 3.4 Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres.

Proposition 3.5 Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Théorème 3.6 (Cayley - Hamilton) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

2. ... au calcul intégral

Définition 3.7 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.

Pour tout $x \in \Omega$, on définit le jacobien de φ en x par $J\varphi(x) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}\right)_{ij}$.

Théorème 3.8 Soient U un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathring{U} \longrightarrow \varphi(\mathring{U}) \subset \mathbb{R}^n$.
Alors pour toute fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, on a : $\int_V f(v)\,dv = \int_U f\circ\varphi(u)\,|J\varphi(u)|\,du$
où $V = \varphi(U)$.

Application 3.9

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$