L226 : Suites vectorielles et réelles déf par une relat° de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
Ex : Appli à la résolut° approchée d'équations

[G] Gourdon
[D] Demailly
[R] Rouvière
[P] Pommelet

Dvpt : Gradient à pas optimal (thm 35) [FGN 4]
Processus de Galton Watson (Appli 9) [Cottrel : Appl]

On se place sur $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^n$ $n \geq 1$.

I - Généralités sur les suites récurrentes

a) Définition et cadre

[G] **Déf 1** : Soit $h \in \mathbb{N}^*$: une suite (u_n) à valeur dans E est dite récurrente d'ordre h si $\exists f : E^h \to E$ tq $\forall n \geq h$ $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$

Ex 2 : • Soit $E = \mathbb{R}$, $f = Id_{\mathbb{R}}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite récurrente associée à f d'ordre 1, de 1er terme u_0 est la suite constante égale à u_0
• Soit $E = \mathbb{R}$, $u_0 \neq 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, la suite récurrente d'ordre 1, associée à f et de 1er terme u_0 est la suite valant alternativement u_0 et $\frac{1}{u_0}$

Prop 3 : Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente d'ordre h, elle induit une suite récurrente d'ordre 1 en posant
$$Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+h-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } Y_{n+1} = F(Y_n) \text{ où } \forall (a_1, \dots a_h) \in E^h$$
$$F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ f(a_1, \dots a_h) \end{pmatrix}$$

b) Comportement des suites récurrentes

(G) **Prop 4** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_n$ tq $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$
(i) Si f est croissante alors la suite $(u_n)_n$ est monotone
(ii) Si f est décroissante les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposés.

Ex 5 : • dans le 2ème ex de l'ex 2, f est décroissante et $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont 2 suites constantes.
• soit $u_0 > 0$ et $f(x) = \sqrt{x}$, suivant u_0 choisi, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est soit croissante ($u_0 < 1$) soit constante ($u_0 = 1$) soit décroissante ($u_0 > 1$)

(G) **Prop 6** : Soit $f : E^h \to E$ continue et $(u_n)_n$ une suite récurrente d'ordre h associée à f. Alors si $(u_n)_n$ converge vers une limite l alors $l = f(l, \dots, l)$

(P) **Ex 7** : Soit $u_0 \in]0, \pi[$ la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ décroît vers 0.

(P) **Prop 7** : Soit f continue croissante de I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. et λ, μ deux points fixes consécutifs de f. La suite rec. donnée par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers λ ou μ selon la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

Lemme 8 : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des v.a de m̂ loi à valeur dans $\mathbb{N}$ et N une va à valeur dans $\mathbb{N}^*$. Soit G_X la fonction génératrice des X_i et G_N celle de N. Soit $S_N = X_1 + \dots X_N$ et G_S la fonction génératrice de S_N. Si les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et N sont mutuellement indep, on a : $G_S = G_N \circ G_X$

[Cot Ap] **Appli 9** : On étudie l'évolution d'une espèce issue d'1 individu à la génération 0. $\forall n \geq 0$ on note Z_n le nombre d'individus à la génération n et $\forall k \in [\![1, Z_n]\!]$, on note X_k^n le nombre de descendants de l'individu k de la génération n. On suppose que les $(X_k^n)_{n \geq 0, k = 1, \dots Z_n}$ sont mutuellement indépendants et de même loi qu'1 v.a. X. On note alors $\forall k \geq 0$ $P(X=k) := p_k$ et $\forall n \geq 0$ $x_n = P(Z_n = 0)$. On suppose de plus que $p_0 \in]0,1[$. Alors

- $x_{n+1} = G_X(x_n)$ $\forall n$
- la probabilité d'extinction est donnée par $p = \lim_{n \to +\infty} x_n$.
- si $E(X) > 1$, $p \in]0,1[$ et si $E(X) \leq 1$, $p = 1$.

c) Quelques suites remarquables

Def 10: Soit $u_0 \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tq $f(x) = qx$ $\forall x \in \mathbb{C}$ où $q \in \mathbb{C}$ fixé. La suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est appelée suite géométrique de raison q.

[G] **Prop 11**: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = q^n u_0$ et si $|q| < 1$ $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Def 12: Soit $u_0 \in E$ et $f : E \to E$ tq $f(x) = x + a$ $\forall x \in E$ où $a \in E$ fixé. La suite récurrente déf. par $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est appelée suite arithmétique de raison a.

Prop 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison a, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + na$.

Def 14 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe vérifie une récurrence homographique si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = h(u_n)$ où $h = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ad - bc \neq 0$

Prop 15 Soit $(u_n)_n$ comme dans la def 14.

- Si l'équation $h(x) - x = 0$ a 2 racines distinctes α, et β alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.
- si l'éq $h(x) - x = 0$ a 1 racine double α alors $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.

Ex 16: Soit (u_n) déf par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé. La suite définie par $u_{n+1} = \frac{a u_n + 1}{u_n + a}$, a pour équation associée $X^2 = 1$.
Ainsi $\frac{u_n + 1}{u_n - 1} = k^n \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1}$ où $k = \frac{a-1}{a+1}$

Cela permet de voir pour quel u_0 la suite est bien définie.

Def 17: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à coef constants si $\forall n \geq h$ $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots a_h u_{n-h}$ (*) [G]
où $(a_1, \dots a_h) \in \mathbb{C}^h$ fixés. L'ensemble

Prop 18. Soit $(a_1, \dots a_h) \in \mathbb{C}^h$ fixés. L'ensemble des suites vérifiant la relation (*) forment un $\mathbb{C}$-ev de dimension h. [P]

Rq 19: Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant (*), on peut l'étudier en étudiant la suite vectorielle: $Y_{n+1} = AY_n$ où $Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+h-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ a_h & \cdots & & a_1 \end{pmatrix}$

On a alors $Y_n = A^n Y_0$. Si l'on sait calculer les puissances de A (par ex en la diagonalisant), on pourra exprimer u_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prop 20: Soit l'équation $x^h - a_1 x^{h-1} - \dots - a_h = 0$ que l'on appelera équation caractéristique de la relation (*). Notons $x_1, \dots x_q$ les racines et $\alpha_1, \dots \alpha_q$ leur multiplicités, alors l'ensemble des suites $(u_n)_n$ vérifiant * est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n) x_1^n + \dots + P_q(n) x_q^n$ où $\forall i$, P_i est un polynôme de degré $< \alpha_i$. [G]

Ex 21: Si u_0, u_1 donnés, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ fixés et $\forall n \geq 2$ $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$ (**)
L'équation caractéristique est $x^2 - ax - b = 0$

- Si elle a 2 racines: x_1 et x_2, les suites vérifiant (**) sont celles de la forme $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$, où λ, μ déterminés à partir de u_0 et u_1 [G]
- Si elle a une racine double x, les suites vérifiant (**), sont celles de la forme $u_n = (\lambda n + \mu) x^n$. où λ, μ déterminés à partir de u_0 et u_1

II - Thms de point fixes et application

A - Théorèmes et leurs résultats

Thm 22 Soit (E,d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante. [D]
Alors φ admet un unique point fixe $a \in E$
De plus $\forall x_0 \in E$ la suite déf par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a. De plus, $\forall p \geq 0$ on a:
$d(x_p, a) \leq k^p d(x_0, a)$ [R]

C-ex 23: Soit $X = [0,1]$ $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ X est complet et F contractante mais $F(X) \not\subset X$ il n'y a pas de point fixe.

- X complet quelconque: $F(x) = x$ n'est pas contractante et tout point est fixe.
- $X =]0,1[$ $F(x) = \frac{x}{2}$. F est contractante de X dans X mais X n'est pas complet: pas de point fixe.

Thm 23. Soit (X,δ) et (E,d) des esp métriques (E,d) complet et $f : \begin{array}{l} X \times E \longrightarrow E \\ \lambda, x \longmapsto F(\lambda, x) \end{array}$ continue [G]
contractante en la 2nd variable. Alors $\forall \lambda \in X$, l'application $F_\lambda : x \longmapsto F(\lambda, x)$ admet un unique point fixe; de plus l'application qui à λ associe l'unique point fixe de F_λ est continue.

Appli 24 (Thm de Cauchy Lipschitz) Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne en la seconde variable et $(t_0, y_0) \in U$. Alors:
i) $\exists$ une solut° au pb de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ déf au voisinage de t_0
ii) Si y_1 et y_2 sont 2 solutions du problème de Cauchy sur un intervalle I, alors $y_1 = y_2$

[6]

Appli 25. **Thm d'inversion locale** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$ tq $D_a f$ inversible. Alors $\exists V$, un voisinage ouvert de a et $\tilde{V}$, un voisinage ouvert de $f(a)$ tq : $f|_V : V \longrightarrow \tilde{V}$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

B- Classification des points fixes [D]

Soit $\varphi : I \to I$ où I un intervalle de $\mathbb{R}$, φ $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$ point fixe de I. On désigne par $(x_p)_p$ la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Prop/déf 26. • Si $|\varphi'(a)| < 1$, alors il existe un voisinage $J = [a-h ; a+h]$ de a tq $\forall x_0 \in J$, $\lim_{p\to+\infty} x_p = a$. a est dit attractif, on a alors $|x_p - a| \leq k^p |x_0 - a|$ $\forall p$ où k constante < 1.

• dans le cas où φ est $\mathcal{C}^2$ et $\varphi'(a) = 0$, a est dit superattractif et $\forall x_0 \in J$, on a : $\forall p \in \mathbb{N}$ $|x_p - a| \leq C\, 10^{-2^p}$ où C constante.

• si $|\varphi'(a)| > 1$ a est dit répulsif : $\exists$ un voisinage $J = [a-h ; a+h]$ tq $\forall x_0 \in J \setminus \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_{n+1} - a| > |x_n - a|$

Ex 27 : Si $|\varphi'(a)| = 1$, on est dans un cas douteux :
- $\varphi(x) = \sin(x)$ sur $[0 ; \pi/2]$, $(x_n)_n$ converge vers le point fixe 0 $\forall x_0 \in [0 ; \pi/2]$
- $\varphi(x) = \mathrm{sh}(x)$, sur $\mathbb{R}^+$: le point fixe 0 est répulsif et $\forall x_0 > 0$ $\lim_{p\to+\infty} x_p = +\infty$.

Rq 20 : Le comportement au voisinage d'1 point attractif est décrit en annexe, graphique 1et2

Appli 28 : Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$ $\forall x \in [0 ; 0{,}5]$
On cherche à résoudre $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$
Soit a la solution de $f(x) = 0$: on mq a est un point fixe attractif de φ et que $\forall x_0 \in [0 ; 0{,}5]$ on aura $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ où $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Rq 29 De même, si $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \Omega$ point fixe de φ. On dira que a est un point fixe attractif de φ si $\exists V$ un voisinage fermé de a tq $\varphi(V) \subset V$ et une norme N sur $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi|_V$ soit contractante pour N. On aura alors $\forall x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.
Le point a est dit superattractif si la convergence est quadratique.

C- Méthode de résolution approchée : [D]

• méthode de Newton et généralisation.

Thm 30 Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [a-r ; a+r]$, tq $f' \neq 0$ sur I, et $f(a) = 0$. Soit $M = \max_{x\in I} \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$ et $h = \min(r ; 1/M)$. Alors $\forall x \in [a-h ; a+h]$ on pose $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et on a $|\varphi(x) - a| \leq M|x-a|^2$ et $\forall x_0 \in [a-h ; a+h]$ si $x_p = \varphi(x_{p-1})$, on a $\forall p \geq 1$ $|x_p - a| \leq \frac{1}{M}(M|x_0 - a|)^{2^p}$

Rq 31 : L'idée ici est de remplacer en chaque point x_p f par sa tangente. x_{p+1} est alors le point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses. (voir graphique 3.)

Ex 32 : $f(x) = x^3 - 4x + 1$, $\varphi(x) = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}$: on trouve une valeur approchée des 3 racines de f sur $\mathbb{R}$ à 10^{-9} près en partant respectivement des points initiaux : $x_0 = -2$ $x_0 = 0$ et $x_0 = 2$.
L'algorithme converge ici en 5 itérations au plus.

Thm 33 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $a \in \Omega$ tq $f(a) = 0$ et que $D_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m ; \mathbb{R}^m)$ est inversible. Alors a est un point fixe superattractif de φ où $\varphi(x) = x - (D_x f)^{-1} \cdot f(x)$.

• méthode de gradient

Prop 34 Soit $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tq $\exists \alpha > 0$ tq $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ $G(y) - G(x) \geq \langle \nabla G(x) ; y - x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$ (*)
Alors G est strictement convexe.

Gradient à pas optimal : on fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on définit $x_{k+1} = x_k + \rho_k \nabla G(x_k)$ où ρ_k vérifie $G(x_k + \rho_k \nabla G(x_k)) = \min_{\rho\in\mathbb{R}} G(x_k + \rho \nabla G(x_k))$

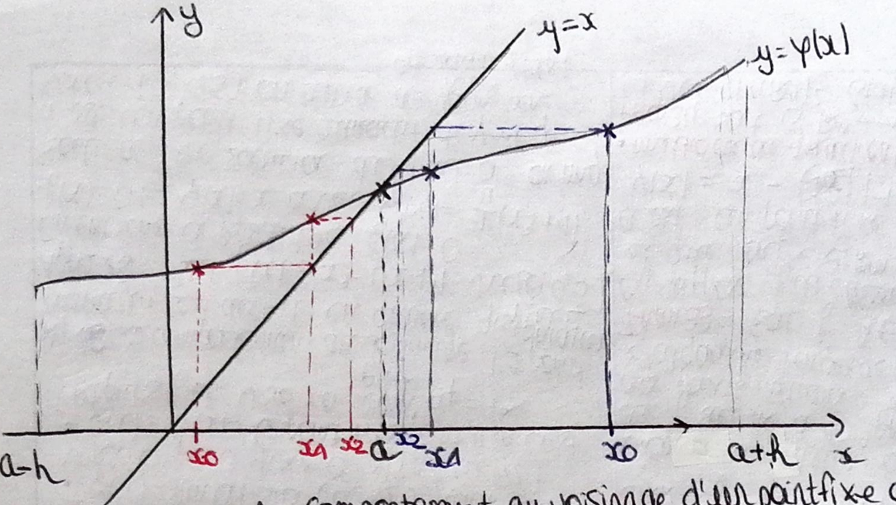
Thm 35 Soit $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant (*) alors G admet un unique minimum et la méthode du gradient à pas optimal est bien définie et converge vers ce point de minimum.
(voir graphique 4)

• Schéma d'Euler

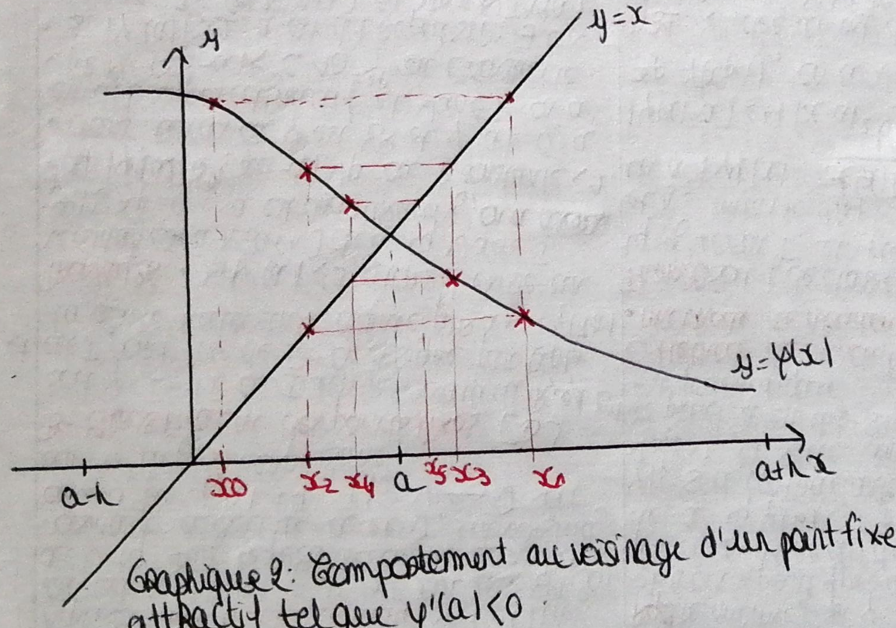
Dans ce paragraphe, on considère une équation différentielle $y' = f(t,y)$ (E) où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$.

Schéma d'Euler : on veut construire une solut° approchée de (E) sur $[t_0 ; t_0+T]$. Soit $(t_n)_{n\in[0;N]}$ une subdivision de $[t_0 ; t_0+T]$ et $\forall n \in [0 ; N-1]$ $h_n = t_{n+1} - t_n$, $h_{max} = \max_{n=0..N-1} h_n$.
Partant de la donnée initiale $y_0 = y(t_0)$ on construit y_n par récurrence en posant $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$, $t_{n+1} = t_n + h_n$.
La solution approchée s'obtient graphiquement en traçant pour chaque n les segments joignant (t_n, y_n) à $(t_{n+1} ; y_{n+1})$. (voir graphique 5)

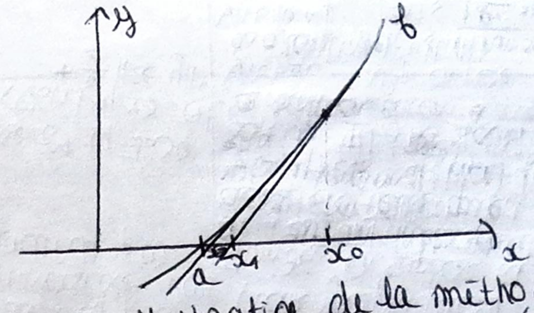
Thm 36 On suppose ici f définie sur $I\times\mathbb{R}^m$ où $I = [t_0 ; T]$, de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\exists L > 0$, $\forall t \in I$ $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^m)^2$ $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$. Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$ solution de (E), et $M > 0$ tq $\sup_{t\in I} \|y''(t)\| \leq M$. On considère $(y_n)_{n\in[0;N]}$ les points obtenus avec le schéma d'Euler. $\forall n \geq 0$: si on pose $e_n = y(t_n) - y_n$, et $\varepsilon_n = [y(t_{n+1}) - y(t_n)] - h_n f(t_n, y(t_n))$. Alors $\forall n \in [0 ; N]$: $|\varepsilon_n| \leq \frac{M h_{max}^2}{2}$ et $\|e_n\| \leq \frac{M h_{max}}{2L} e^{L n h_{max}}$ [Cou] p388



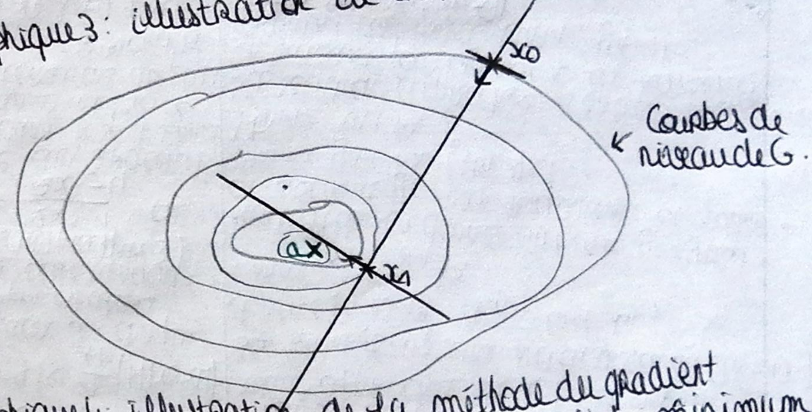
Graphique 1 : Comportement au voisinage d'un point fixe a, attractif tel que $\varphi'(a) > 0$



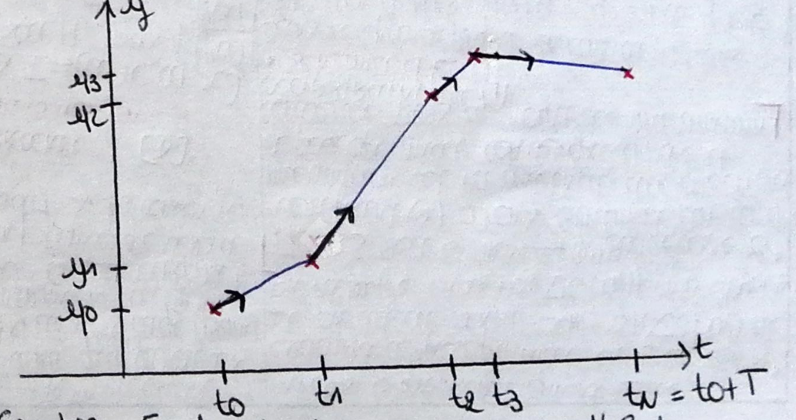
Graphique 2 : Comportement au voisinage d'un point fixe a, attractif tel que $\varphi'(a) < 0$



Graphique 3 : illustration de la méthode de Newton



Graphique 4 : illustration de la méthode du gradient à pas optimal pour la recherche du point de minimum a d'une fonction G.



Graphique 5 : illustration du schéma d'Euler.