

Appl 19 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ est convergente alors la suite (u_n) détermine par $Su = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est aussi

II - Critères de convergence

Thm 20 Soit (u_n) une suite réelle de $\mathbb{R}$. Alors

Ex 21 une suite (u_n) de réels est convergente si sa limite inf et sa limite sup sont égales.

Appl 22 Soit f une fonction continue $(a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est une suite récurrente continue

Thm 23 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ 3 suites réelles tq a) (u_n) est un certain rang, $u_n < v_n < w_n$. Si (u_n) et (w_n) sont convergents, et de même limite l alors (v_n) est convergente de limite l

Ex 24 $\frac{1}{n!} \rightarrow 0$

Ex 25 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives $u_n \geq v_n$ alors si (u_n) est convergente de limite l et $(v_n) \sim \frac{1}{n}$ alors (v_n) est divergente

Appl 26 $\ln(n!) \sim n \ln n - n + 1 + o(1)$ après $H_n \sim \ln n$

et si $u_n = \ln(n!)$ $u_n - x \sim \frac{1}{2} \ln \frac{4\pi}{n}$ et donc finalement le développement asymptotique qui donne finalement le développement asymptotique

Thm 27 Soit (u_n) et (v_n) 2 suites réelles. Si (u_n) est convergente vers l et (v_n) est bornée alors $(u_n v_n)$ converge vers l et (u_n) est bornée

Ex 28 la suite $(\frac{1}{n})$ est bornée et $(\frac{1}{n^2})$ est bornée et $(\frac{1}{n^2})$ est convergente vers 0

Ex 29 2 suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si elles vérifient $u_n \leq v_n$ et $(v_n - u_n) \rightarrow 0$

Thm 30 2 suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si elles sont convergentes et ont la même limite

Appl 31 Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante convergente vers 0. Alors $\sum u_n$ est convergente

Thm 32 Soit (u_n) une suite complexe de limite l alors $(\text{Re } u_n)$ et $(\text{Im } u_n)$ sont convergents de limite $\text{Re } l$ et $\text{Im } l$ respectivement

Thm 33 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) est bornée et $(\sqrt[n]{|u_n|}) \rightarrow 0$ alors (u_n) est convergente vers 0

Ex 34 $(\frac{1}{n})^n$ est une suite convergente vers 0

Prop 35 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge alors $u_n \rightarrow 0$ si positif

Ex 36 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(u_n + v_n)$ converge vers $l + m$

Ex 37 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(u_n v_n)$ converge vers lm

Ex 38 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 39 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 40 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 41 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 42 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 43 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 44 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 45 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 46 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 47 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 48 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 49 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Appl 42 Soit $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ continue et $f(x) = \sqrt{x}$. Alors $(f^n(x))$ converge vers 0

Ex 50 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 51 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 52 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 53 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 54 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 55 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 56 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 57 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 58 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 59 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 60 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 61 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 62 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 63 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Ex 64 Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers m alors $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{m}$ si $m \neq 0$

Appl 53 (methode de Newton) Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une classe $\mathcal{C}^1$ on sup-
 $\alpha, d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0 \forall x \in [c, d]$

Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ et la suite def. par $x_0 \in [c, d]$ et
 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

* on a f admet un unique zéro $a \in]c, d[$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par f et $\forall x_0 \in I$ la suite (x_n) a une convergence dicative à a dans I . Le resultat est valable

* Si de plus $f''(x) > 0 \forall x \in [c, d]$, le resultat est valable pour $I = [a, d]$, (x_n) est alors strictement decroissante si $x_0 \neq a$ et on a $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

IX - Sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et application:

Thm 54 Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors soit G est dense dans $\mathbb{R}$ soit $\exists a > 0$ tq $G = a\mathbb{Z}$.

Ex 55 Soit G un sous groupe propre de $\mathbb{R}$ alors $G = a\mathbb{Z}$ et $G = a\mathbb{Z}$.

Appl 56 * Soit $a \in \mathbb{R}$ un irrationnel, $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 * Exemple du groupe d'addition de la suite $\sin(n)$

[P] * Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le groupe G des periods de f est $[0, 1]$ ou $G = \mathbb{R}$ et f constante ou $G = a\mathbb{Z}$

* Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction admettant 1 et $a > 0$ on peut ainsi montrer qu'une fonction admettant 1 et $a > 0$ est constante.