L205 - Espaces complets. Ex et applis.

I- Espaces complets, def et propriétés.

Dans cette partie, (E,d) désigne un espace métrique

1) Suites de Cauchy et propriétés.

Def 1 : Une suite $(u_n)_n$ de E est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n,m \geq N$ $d(u_n, u_m)\leq\varepsilon$

Prop 2 : Toute suite convergente est de Cauchy

Prop 3 : • Toute suite de Cauchy est bornée
• Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente

Ex 4 : • La suite de $\mathbb{Q}$ définie par $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{2}\,10^n \rfloor}{10^n}$ est de Cauchy car elle est convergente.
• La suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Prop 4 b : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ uniformément continue, si $(u_n)_n$ est de Cauchy dans (E,d) alors $(f(u_n))_n$ est de Cauchy dans (E',d')

2) Espace complets et propriétés.

Def 5 : (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans (E,d) est convergente dans E

Rq 6 : En particulier dans un espace complet, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy

Ex 7 : La suite $(u_n)_n$ de l'exemple 4 montre que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet car elle est de Cauchy mais converge vers $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Prop 8 : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

Cor 9 : $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet

Ex 10 : La suite H_n de l'ex 4 n'est donc pas convergente dans $\mathbb{R}$.

Prop 11 : Soit $F\subset E$ une partie complète, alors F est fermée dans E

Prop 12 : Si (E,d) est complet, tout sous espace fermé de E est complet.

Prop 13 : Soient (E_i, d_i) $i\in[\![1,n]\!]$ des espaces métriques complets, alors l'espace produit $E = E_1 \times \cdots E_n$ muni de la distance produit d est complet.

Ex 14 : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de la distance produit sont complets.

Prop 15 : Si les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, (E,d_1) peut être complet sans que (E,d_2) le soit

Ex 16 : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet mais si $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$, $(\mathbb{R},d)$ n'est pas complet bien que d soit topologiquement équivalente à $|\cdot|$

Prop 17 : Soit (E,d_E) et (F,d_F) deux espaces métriques isométriques alors E est complet $\Leftrightarrow$ F est complet

Appli 18 : Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.

Prop 18 b : Soit (E,d) un espace complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de E tq $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ Alors $\exists x\in E$ tq $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

II- Espaces de Banach

1) Exemples et définition

Def 19 : On appelle espace de Banach un espace normé $(E, \|\ \|)$, complet pour la distance induite par $\|\ \|$.

Ex 20 : D'après les items 8 et 9, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces de Banach
• D'après l'appli 18, tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Ex 21 : Soit X un ensemble et $B(X,\mathbb{R})$ l'ev des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ $\forall f \in B(X,\mathbb{R})$
Alors $(B(X,\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est complet.

Ex 22 : $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\ \|_p)$ est complet $\forall p \in [1;+\infty]$

Ex 23 : Soit E et F des evn, avec F complet, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.

Ex 24 : $(\mathcal{C}^0([a;b]), \|\ \|_\infty)$ est complet $\forall a,b \in \mathbb{R}\ a<b$.

Def 25 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx, on munit $L^p(\Omega)$ $p\in[1;+\infty[$ et $L^\infty(\Omega)$ des normes respectives :

$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$ $\forall f \in L^p(\Omega)$

$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C ; |f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega\}$ $\forall f \in L^\infty(\Omega)$

Prop 26 : $(L^p(\Omega), \|\ \|_p)$ $p\in[1;+\infty[$ et $(L^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ sont des evn.

Thm 27 (Riesz Fischer) : L^p est un espace de Banach $\forall 1 \leq p \leq \infty$

Cor 28 : Soit $(f_n)_n$ une suite de L^p qui converge vers f dans L^p, alors $\exists$ une sous suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge presque partout vers f sur Ω.

2 - Propriétés dans les espaces de Banach.

Prop 29 Un evn $(E, \|\ \|)$ est complet si et seulement si toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.

Ex 30 : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.

III - Espaces de Hilbert :

Def 31 : Soit $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Ex 32 : $\cdot$ $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert
$\cdot$ $\ell^2(\mathbb{N})$ et $L^2(\Omega)$ des items 22 et 25 sont des espaces de Hilbert.

Lemme 33 : Soit H un espace de Hilbert, $\forall u,v \in H$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Thm 34 : Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée, non vide de H, alors $\forall x \in H$, $\exists!\ y \in C$ tq $\|x-y\| = d(x,C)$

y est alors caractérisé par $y \in C$ et $Re\langle x-y | z-y\rangle \leq 0$ $\forall z \in C$, on note $y = P_C(x)$

Thm 36 : Si F est un sev fermé de H alors $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$.

Ex 37 : Soit H un espace de Hilbert et E un sev de dim finie alors si $(e_1, \ldots e_n)$ base de E, $\forall x \in E$ $P_E(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.

Thm 37 : $\forall F \subset H$ sev fermé, on a $H = F \oplus F^\perp$ et la project° sur F parallèlement à $F^\perp$ associée est P_F.

IV - Autres applications notables

1 - Théorèmes de point fixe

Thm 38 : Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ k contractante $k \in]0,1[$. Alors f admet un unique point fixe.

Ex 39 : $X =]0;1[$ et $F(x) = x/2$
L'application est contractante mais X n'est pas complet : pas de point fixe.

Rq 40 Si c'est l'un des itérés f^r de f qui vérifie les hypothèses, le résultat reste vrai

Appli 41 : (Thm de Cauchy Lipschitz linéaire) Soit $n \geq 1$, $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continues. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)\, y + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Thm 42 : Soit (X, δ) et (E, d) esp. métriques avec (E, d) complet. Soit $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, k contractante en la seconde variable. Alors $\forall \lambda \in X$, $\exists !\, y \in E$ tq $F(\lambda, y) = y$, on note y_λ un tel élément. L'application $\begin{array}{l} X \longrightarrow E \\ \lambda \longrightarrow y_\lambda \end{array}$ est continue

Appli 42. (Thm d'inversion locale) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $D_a f$ soit inversible, alors $\exists$ un voisinage ouvert U' de a et un voisinage ouvert V' de $f(a)$ tel que $f_{|U'} : U' \to V'$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

2- Théorèmes de prolongement.

Thm 43 : Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, A une partie dense de E dans E, si $f : (A, d) \to (F, \delta)$ est continue et si $\forall x \in E \setminus A$, $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$ existe, $\exists !\; g : E \longrightarrow F$ continue qui prolonge f.

Thm 44 : Si de plus (F, δ) est complet et si $f : (A, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est uniformément continue alors $\exists !\; g : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ uniformément continue tq $g|_A = f$.

Rq 45 En particulier on peut appliquer ce théorème aux applications linéaires continues.

Appli 46 : $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{\mathcal{F}} : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ étant une application linéaire continue, on peut prolonger la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$