L203. Utilisation de la notion de compacité

[P] Pommellet
[G] Gourdon
[BMP] Objectif agreg
[R] Rombaldi
[ZQ] Zuily Queffelec
[Can] Candelpergher
[B] Beanis
[BR] Brezis.

Dvpt Ascoli
Weierstrass par Bernstein.

I- Parties compactes : propriétés et ex.

a) Compacité et pté de Borel Lebesgue

[Pom] **Def 1** : Un espace métrique (X,d) est dit compact si de tout recouvrement de X par des ouverts de X on peut extraire un sous recouvrement fini

[G] **Ex 2** : • Tout espace métrique fini est compact
• Soit $(x_n)_n$ suite d'1 espace métrique E qui converge vers l alors $K=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$ est compact.
• $\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$ mais on ne peut pas extraire de sous recouvrement fini de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$

[G] **Prop 3** : (E,d) un espace métrique. $A\subset E$ est compacte $\Leftrightarrow$ de tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut extraire un sous recouvrement fini.

[P] **Prop 4** : $[a,b]\subset\mathbb{R}$ avec $a<b$ est compact

[G] **Prop 5** Un espace métrique (X,d) est compact $\Leftrightarrow$ de toute intersection vide de fermés de X on peut extraire une sous famille d'intersection vide.

[G] **Cor 6** Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides d'1 espace métrique (E,d) compact, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

[P] **Appli 7** : (Thm de Dini) Soit $(f_n)_n$ une suite de f° à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues, convergeant simplement vers la f° continue f sur le compact X ; Si $(f_n)_n$ est croissante, alors la cv est unif.

[P] **Ex 7b** : On pose $p_0(t)=0$ $\forall t\in[0,1]$ et $\forall n\geq 0$ $\forall t\in[0,1]$ $p_{n+1}(t)=p_n(t)+\frac{1}{2}(t-p_n^2(t))$. $(p_n)_n$ cv unif. vers $t\mapsto\sqrt{t}$ sur $[0,1]$

b) Compacts dans les espaces métriques propriété de Bolzano Weierstrass :

Dans la suite de la leçon, (E,d) désigne un espace métrique

Thm 8 Toute partie compacte de E est bornée. [Gau]

Thm 9 (Bolzano-Weierstrass) (E,d) est compact $\Leftrightarrow$ de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous suite convergente. [Gau]

Appli 10 Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ admet une sous suite convergente [Pom]

Cor 11 Si E compact et A fermée dans E, alors A compacte. [Gau]

Appli 12 une intersection quelconque de sous espaces compacts de E est compacte. [Gau]

Cor 13 : Tout espace métrique compact est complet et tout sous espace compact d'1 espace métrique est fermé borné. [Pom]

Appli 14 Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés. [P]

Prop 15 Soit $E_1, \dots E_n$ un nb. fini d'espaces métriques $E=E_1\times\dots E_n$ est compact $\Leftrightarrow$ E_i est compact $\forall i$ [G]

Appli 16 Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ [G]

II- Applications continues et espaces compacts

a) un argument de continuité

[P] **Prop 17** : Soit $(x_n)_n$ une suite de points d'un espace métrique compact ; alors elle converge $\Leftrightarrow$ elle possède au plus une valeur d'adhérence

[BMP] **Appli 18** $\exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue

[P] **Appli 19** : Si F est un espace métrique compact et $f : E \to F$; alors f est continue $\Leftrightarrow$ le graphe de f est fermé dans $E \times F$

b) fonctions définies sur un compact et théorème des bornes atteintes

[P] **Thm 20** Si (E,d) compact et F un espace métrique, pour toute fonction continue $f : E \to F$, $f(E)$ est compacte dans F.

[P] **Thm 21** Soit f continue de E dans $\mathbb{R}$ avec E compact alors f est bornée et atteint ses bornes

[P] ou [G] **Appli 22** (Rolle) Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ dérivable sur $]a;b[$, tq $f(a) = f(b)$; alors $\exists\, c \in]a;b[$ tq $f'(c) = 0$

Appli 23 : Soit F un fermé de E et K un compact de E : alors $\exists (f;h) \in F \times K$ tq $d(F;K) = d(f;h)$ + devpt. E de dim finie

[D] **Appli 24** Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\|f - q_n\|_\infty = d(f; \mathbb{R}_n[X])$

Appli 25 Soit K un compact $\subset \{z \in \mathbb{C} ; Re(z) > 0\}$ alors $\exists (a;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tq $\forall z \in K$ $Re(z) \in [a;b]$

Cette propriété permet de démontrer l'holomorphie de la fonction Γ d'Euler sur Λ.

Thm 26 : Si E est compact et $f : E \to E$ tq $\forall (x,y) \in E^2$ $x \neq y$, $d(f(x); f(y)) < d(x;y)$: alors f admet un unique point fixe [G]

c) Le théorème de Heine et ses application

Thm 27 Soit $f : X \longrightarrow F$ où $X \subset E$ compact et F un espace métrique. Si f continue sur X alors f est uniformément continue sur X. [P]

Appli 28 : Une f° $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique continue est unif continue. [P]

Appli 29 Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est Riemann intégrable sur $[a;b]$

Appli 30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $\pm\infty$; continue, alors f est unif continue. [P]

Appli 31 $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue ; alors f est limite d'1 suite de f° affines par morceaux [P]

Thm 32 (Weierstrass) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ continue ; alors f est limite uniforme sur $[a;b]$ d'1 suite de fonctions polynomes. [Gou]

III- Compacité dans les espaces de dimension finie

Thm 33 (E,d) est de dim finie $\Leftrightarrow$ $\bar{B}(0,1)$ est compacte. (Riez) [G]

Ex : $\ell^2(\mathbb{N})$ est de dim infinie et $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compact car si $\forall n \in \mathbb{N}$ $e^n = (0, \dots 1, 0 \dots)$ [P]
n-ième place

$(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\bar{B}(0,1)$ qui n'admet aucune sous suite convergente.

mettre à la fin car besoin de compl.

À partir de l'appli 16, et du thm 20, on peut montrer

Thm 34 Tout les norme d'un ev de dim finie sont équivalentes [G]

Appli 35 Les compacts d'1 evn de dim finie sont exactement les fermés bornés. [G]

Ex 36 Soit $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien ; $\forall n \in \mathbb{N}$ $O(E)$ est un compact de $GL(E)$ [Rombaldi]

Appli 36 toute application $E \to F$ linéaire avec E de dim finie est continue [G]

Appli 37 : Tout evn de dimension finie est complet. [G]

V - Autres applications notables

1) Théorie de l'intégration

Soit (X,T,μ) un espace métrique et E un espace métrique. Soit $f : E\times X \to \mathbb{C}$ et $F(t) = \int f(t,x)\,d\mu(x)$

[ZQ] **Thm 38** Supposons que • $\forall t\in E$: $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
• ppt $x\in X$ $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur E
• $\forall K$ compact $\subset E$, $\exists g\in L^1$ indépendante de t tq $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall t\in K$ ppt $t\in X$.
Alors F est continue sur E.

[ZQ] **Thm 39** On suppose ici que $E = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que • $\forall t\in I$ $f(t,x)\in L^1(X)$
• ppt $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I
• $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists g\in L^1$, indépendante de t tq $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ $\forall t\in K$ ppt $x\in X$
Alors $\forall t\in I$ $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est dans $L^1(X)$ et F est dérivable sur I avec
$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$

[ZQ] **Ex 40** : • $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

[Can] • $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Analyse complexe

Thm 41 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à R. Alors converge normalement sur tout compact $K \subset D(0,R)$

[BHP]

Thm 42 Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ (U connexe) alors $\forall$ compact $K\subset U$ f admet un nombre fini de 0 dans K

Thm 43 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact K de U vers une fonction f alors f est holomorphe sur U. [BHP]

Application 45. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$
Cette égalité sert à prolonger Γ en $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,dx$ sur $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ qui est alors une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. [Can]

VI - Pré et relative compacité

Dans cette partie $(E,\|\ \|)$ est un evn.

Def 46 $A\subset E$ est dite relativement compacte si $\bar{A}$ est compacte

Prop 47 $A\subset E$ est relativement compacte $\Leftrightarrow$ de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite qui converge dans E

Def 48 : $A\subset E$ est dite précompacte si, $\forall \varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in A^n$ tq $A\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$

Prop 49 $A\subset E$ relativement compacte $\Rightarrow$ A est précompacte

Rq 50 Si E est complet, la réciproque est vraie.

Appli 51 Pour E et F espaces de Banach, $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F (ie tq $T(B_E)$ relativement compacte) est un sev fermé de $\mathcal{L}(E,F)$ pour $\|\ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ [Br]

VII - Le théorème d'Ascoli

Dans cette partie $(E,\|\ \|)$ est un evn X une partie compacte de E.
$(\mathcal{C}(X), \|\ \|_\infty)$ désigne l'evn des fonctions continues sur X à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def 52 $A\subset \mathcal{C}(X)$ est dite équicontinue si $\forall x\in X$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta_x>0$ tq $\forall y\in X$ tq $\|x-y\|<\eta_x$, $\|f(x)-f(y)\|\leq\varepsilon$ $\forall f\in A$ [B]

Prop 53 $A\subset\mathcal{C}(X)$ équicontinue $\Rightarrow$ A est uniformément équicontinue ie $\forall\varepsilon>0$ $\exists\eta>0$ tq $\forall (x,y)\in X^2$, $\|x-y\|\leq\eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|\leq\varepsilon$ $\forall f\in A$

Prop 54 Toute partie compacte de E est séparable [B]

Prop 55 Soit $(X_p,d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts et $\forall p\in\mathbb{N}$ $(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X_p. On suppose que $\forall p\in\mathbb{N}$ $\{x_n^p : n\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_p. Alors $\exists \varphi$ une extractrice tq $\forall p\in\mathbb{N}$ $(x^p_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X_p

Thm 56 (Ascoli) Soit $A\subset\mathcal{C}(X)$ alors A est relativement compacte $\Leftrightarrow$ A est bornée et équicontinue [B]

Appli 57 (Cauchy Peano) Soit $C = [t_0-T; t_0+T]\times\bar{B}(y_0; r_0)$ un cylindre de sécurité pour l'équation (E) : $y' = f(t,y)$ où $f : U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue. Alors $\exists$ une solution $y : [t_0-T; t_0+T] \to \bar{B}(y_0; r_0)$ de (E) avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ [D]