

2190 - Methode combinatoire, problemes de denombrement

[Tauriel - Math ge pour l'agreg]
 [Rombaldi]
 [Sp]
 [Aigner - Ziegler - Raisonsnements divins]
 [Combes]
 [Reuilly]
 [Fon ex de math pour l'agreg Alg 1]

on le trouve dans le livre de Bourbaki

(A1) Applications : Soit n entiers $a_1, \dots, a_n$ ou non, il existe toujours un ensemble d'une taille $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ et dont la somme $\sum a_i$ est multiple de n .

I - Ensembles finis

On désigne ici par A et B deux ensembles finis

(A1)

Prop 1. Si $f: A \rightarrow B$ est une application avec $|A| > |B|$ alors f n'est pas injective

(S1)

Ex 2. Soit une bijection entre A et B $|A| = |B|$

(S2)

Prop 3. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ et si A et B disjoint on a $|A \cup B| = |A| + |B|$

(P)

Ex 4. Soit q un et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit E est un $\mathbb{F}_q$ - es de dimension n alors $|E| = q^n$

Appl 5. Soit K un corps fini alors $|K| = q^n$ ou $q = \text{car}(K)$ et $n = [K: \mathbb{F}_q]$

(S3)

Prop 6. Le nombre d'applications de A ds B est $|B|^{|A|}$

(S4)

Appl 7. $|P(A)| = 2^{|A|}$

(S5)

Prop 8 (lemme de Burnside) Soit $f: A \rightarrow B$ surjective et $q \in \mathbb{N}$ tq $|f^{-1}(y)| = q \forall y \in B$ Alors $|A| = p \cdot |B|$

Appl 8. (Exemple) Tout sous groupe H d'un groupe fini G vérifie $|H| \mid |G|$

II - Arrangements, permutations et combin

(T)

Def 9. On appelle r -arrangement de A toute application $f: \{1, \dots, r\} \rightarrow A$ injective

On note A_r le cardinal de cet ensemble

(T1)

Prop 10. On a $A_r^p = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot p^r$ si $p \in \{1, \dots, n\}$

(S6)

Appl 11. Dans un tirage de r éléments parmi n sans remise, il y a A_r^n possibilités de tirage

Ex 12. (problème des anniversaires) : On considère une assemblée de n personnes et on s'intéresse à l'événement A : "toutes les personnes ont des dates d'anniversaire différentes".

Alors $P(A) = \frac{n!}{n^n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \dots$

pour $n > 365$ $P(A) = 0$ pour $n > 365$ $P(A) < 1/2$ et pour $n = 42$

$P(A) < 0,09$

Prop 13. On note pour peu, $P_r(A)$ l'ensemble des parties de A à r éléments de $P_r(A)$ s'appelle sur-combinaison de r éléments si $n = |A|$ on a alors $P_r(A) = 1$ si $r = |A|$ et si $r < n$ et $r > 0$ on note $|P_r(A)| = \frac{n!}{r!}$

Prop 14. On a $|P_r(A)| = \frac{n!}{r!}$

Prop 15. $|P_r(A)| = \frac{n!}{r!} \cdot \frac{1}{(n-r)!}$ et pour $p < n$

$|P_{p+1}(A)| = |P_p(A)| + |P_p(A)|$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Ex 16. Il y a autant de parties de A de cardinal impair

Prop 17. Soit x, y deux éléments d'un anneau qui commutent, alors $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Prop 18 (version de Pascal) Soit $f(n, k)$ le nombre de parties de A de cardinal k et $f(n, 0) = 1$

$f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-1, k-1)$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

~~BOA~~ BOA AVERN, IL =
 dir p. 101

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

 ~~$\int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$~~
 ~~$\Rightarrow$ Hum. de Stefan~~

(R)

Thm 43: Si $\text{Ker } \varphi$ est nul suite d'éléments de $\mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n = \sum_{d \in \mathbb{N}} p(d) \varphi^d$

Appl 43: des coefficients φ^n et des $\text{thm } \varphi$, on déduit $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\varphi^n = \sum_{d \in \mathbb{N}} p(d) \varphi^d$

Exemple 44 Soit $A(n, q)$ l'ensemble des poly linéaires unitaires de deg n sur $\mathbb{F}_q$ alors $X^{q^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{a \in \mathbb{F}_d} (X - a)$

Thm 45 $|A(n, q)| = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} p(d) q^d$

Ex 46: $|A(1, 2)| = 2$: id $y a$ $x + 1$ et x

$|A(2, 2)| = 2$: id $y a$ $x^2 + 1$

$|A(3, 2)| = 2$: id $y a$ $x^3 + x + 1$