265. Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

I. Fonction exponentielle

1) Définitions, propriétés fondamentales

Déf./Prop. ①: La fonction $\exp : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction holomorphe entière appelée fonction exponentielle.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on notera également $e^z = \exp(z)$, et on pose $e = e^1$.

Prop. ②: 1) $e^0 = 1$
2) $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $e^{a+b} = e^a e^b$

Déf. ③: On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos z = \mathrm{Re}(e^{iz}) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \mathrm{Im}(e^{iz}) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ pour $z \in \mathbb{C}$

Th. ④: 1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$
2) $\exp' = \exp$
3) la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est une fonction positive strictement croissante. De plus $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
4) il existe un réel $\pi > 0$ tel que :
$e^{i\pi/2} = i$ et $e^z = 1$ SSI $\frac{z}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$
5) exp est périodique de période $2i\pi$.
6) $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ est surjective.
7) $\forall w \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C} / w = e^z$

2) Fonctions trigonométriques

Prop. ⑤: 1) cos et sin sont des fonctions entières développables en série entière : $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
3) cos et sin sont 2π-périodiques
4) $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
5) $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$

Prop. ⑥: Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$

Prop. ⑦: On a les tableaux de variation suivants (ANNEXE)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

3) Exponentielle matricielle

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf/Prop ⑧: $\exp : M \in \mathcal{M}_n(K) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ est une application bien définie.

Prop. ⑨: 1) $\exp(0) = I_n$
2) $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
3) $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $\exp A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$
4) $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\exp A \in K[A]$.

Rq ⑩: Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est telle que son polynôme caractéristique χ_A est scindé, alors on peut utiliser sa décomposition de Dunford pour calculer e^A.

Ex. ⑪: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Alors $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

4) Applications

a) un résultat de densité

Lemme ⑫: Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\exp(i2\pi\theta\mathbb{Z})$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Th. ⑬: (Kronecker)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, irréductible de degré $n \geq 1$ tel que ses racines dans $\mathbb{C}$ soient de module ≤ 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

Appli. ⑭: Soit $O \in O_n(\mathbb{Z})$. Alors χ_O est produit de polynômes cyclotomiques.

Prop. ⑮: Soit G un sous groupe compact de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Alors G est un sous-groupe de racines de l'unité ou G est dense dans $\mathbb{U}$.

b/ topologie

Th. 16 : (*décomposition polaire*)
L'application $f : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme

Th. 17 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Appli. 18 : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

c/ équations différentielles linéaires (EDL)

Th. 19, Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues. Alors les solutions de $y' = a(t)y + b(t)$ sont de la forme

$$y(t) = C e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(u)} b(u)\,du$$

où $t_0 \in I$ et A est une primitive de a sur I.

Ex. 20 : La résolution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans une barre par variables séparées nous donne une dépendance en temps de la forme $e^{-n^2 t}$. (si barre $= [0,\pi]$).

Th. 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'unique solution de $Y' = AY$ de conditions initiales $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$.

Rq 22 : Le calcul d'exponentielle par la décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nous permet de tracer le portrait de phase de $Y' = AY$. (ANNEXE)

Appli. 29 bis : (*transformée de Fourier d'une gaussienne*)
Soit $f(x) = e^{-x^2}$ et $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$.
Alors $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{4}}$

II. Fonction gamma

Déf. 23 : Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. On définit pour $z \in P$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z} e^{-t}\,dt \quad \text{(fonction gamma d'Euler)}$$

1) Etude de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$

Prop. 24 : Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, Γ est > 0 et $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ DVP 1

Prop. 25 : Γ et $\ln \Gamma$ sont convexes

Prop. 26 : 1) $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier $\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \geq 1$
2) $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

Prop 27 : $\Gamma(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $\Gamma(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel qu'on ait le tableau de variations suivant : (ANNEXE)

x	0	α	$+\infty$
$\Gamma(x)$	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

Lemme 28 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$I_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

Alors, $I_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)$. DVP 1

Th. 29 : (*formule d'Euler-Gauss*)

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

2) Etude de Γ sur P et prolongement

DVP2

Th (25): Γ est holomorphe sur P et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier ayant un pôle simple en tout $-n$, $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

Rq (26): Les propositions (24), (26.1), (28) et (29) sont toujours vraies si l'on remplace x par $z \in P$

Th. (27): (formule de Weierstrass)

$$\forall z \in P, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}\right]$$

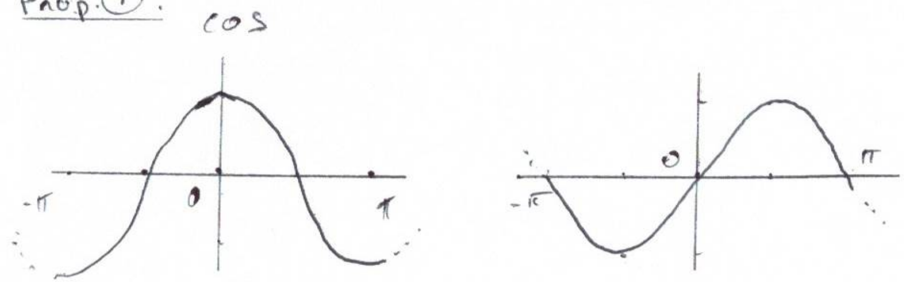
Coro (28): $\frac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction holomorphe entière qui s'annule en tout $-n$, $n \in \mathbb{N}$.

Th. (29): (formule des compléments)

Soit $z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < \operatorname{Re} z < 1$. Alors $\dfrac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \dfrac{\sin \pi z}{\pi}$

ANNEXE

Prop. (7):



Rq (22):

(mettre quelques portraits de phase)

Prop. (27):