253 (1)

253. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn. $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. $n, p \in \mathbb{N}^*$

I. Ensembles convexes

1) Définition, exemples et connexité

[Goud] Déf. (1) : Soient $x, y \in E$. On appelle segment d'extrémités x et y, noté

51 $[x,y]$ l'ensemble $\{ \lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda \in [0,1] \}$.

Déf. (2) : Une partie C de E est dite convexe si : $\forall (x,y) \in C^2$, $[x,y] \subset C$.

Ex. (3) : 1) Tout sev de E est convexe

2) Toute boule (ouverte ou fermée) de E est convexe.

Prop. (4) : Un ensemble convexe est connexe.

Appli. (5) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Si $df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.

Rq (6) : Dans $\mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$ est convexe SSI C est un intervalle

Appli (7) : (Théorème de Brouwer)

Soit $f : B \to B$ une application continue où B est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors f admet (au moins) un point fixe.

2) Espaces de Hilbert $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Cadre (8) : $(E, \langle , \rangle)$ est dans cette partie un espace de Hilbert.

[HL] Th. (9) : (projection sur un convexe fermé) (voir ANNEXE)

91 Soit $C \subset E$ une partie convexe fermée non vide et $x \in E$. Alors, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$ $(= \inf\{ d(x,z), z \in C\})$.

DVP 1 y est appelé projeté de x sur C, noté $p_C(x)$ et est caractérisé par :

$y \in E$, $y = p_C(x) \iff y \in C$ et $\forall z \in C$, $Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.

Prop. (10) : Si F est un sev fermé de E, alors $p_F : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto p_F(x) \end{array} \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

92 Si $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que : $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

Coro. (11) : Si F est un sev de E, alors : $E = \overline{F} \oplus F^\perp$

93 Coro (12) : Un sev F de E est dense dans E SSI $F^\perp = \{0\}$

Th. (13) : (Théorème de Riesz - Fréchet) 96

Soit $E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{C})$. Alors $\Phi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ y \mapsto \Phi_y : \begin{array}{l} E \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \langle x, y \rangle \end{array} \end{array}$ est un isomorphisme isométrique. DVP 1

Appli. (14) : existence de l'adjoint [Ru]

Th. (15) : (Théorème de Fourier - Plancherel) 225

Soit $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier. Alors, $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

3) Théorème de Hahn - Banach $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ [B3]

Déf. (16) : Un hyperplan affine de E est un ensemble de la forme 4 $H = \{ x \in E \,/\, f(x) = \alpha \}$ où f est une forme linéaire non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $(f = \alpha)$.

Déf. (17) : Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan $H = (f = \alpha)$ sépare A et B : 5

1) au sens large si : $\forall x \in A$, $f(x) \leq \alpha$ et $\forall x \in B$, $f(x) \geq \alpha$

2) au sens strict si : $\exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in A$, $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ et $\forall x \in B$, $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$.

(voir ANNEXE)

Th. (18) : (Hahn-Banach, première forme géométrique) 5

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose A ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Th. (19) : (Hahn-Banach, deuxième forme géométrique)

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. 7 On suppose que A est fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Coro (20) : Soit F un sev de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ telle que : $\forall x \in F$, $f(x) = 0$

[Gou] 51

4) Enveloppe convexe $K=\mathbb{R}$

Déf. (21) : Soit A une partie de E. Le plus petit convexe de E contenant A est appelé enveloppe convexe de A, notée $\mathrm{conv}(A)$.

Prop. (22) : $A\subset E$. Alors $\mathrm{conv}(A) = \bigcap_{C\in C_A} C$ où $C_A=\{C\subset E,\ C \text{ convexe et } C\supset A\}$

$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ n\in\mathbb{N}^*,\ \lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1 \text{ et } x_1\dots x_n\in A \right\}$

[ZQ] Lemme (23) : Soit $A\subset E$. Alors,

$x\in\overline{\mathrm{conv}(A)} \iff f(x)\le \sup_{y\in C} f(y) \quad \forall f\in E^*$

205 Appli. (24) : Soit $\|\cdot\|$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $B=\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$.

Alors $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))=B$.

II. Fonctions convexes : inégalités de convexité $K=\mathbb{R}$

Déf. (25) : Soit $C\subset E$ une partie convexe et $f: C\to\mathbb{R}$ une application.
f est dite convexe si : $\forall (x,y)\in C^2,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

1) Concavité du logarithme

Prop. (26) : $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est strictement concave

Appli. (27) : (inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1\dots x_n\in\mathbb{R}_+^*$. Alors : $(x_1\cdots x_n)^{1/n}\le \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$

et l'inégalité est stricte SSI les x_i ne sont pas tous égaux.

[FGN3] 229 Lemme (28) :
Soient $A,B\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha,\beta\ge0$ tels que $\alpha+\beta=1$.
Alors : $\det(\alpha A+\beta B)\ge(\det A)^\alpha(\det B)^\beta$. De plus, si $A\ne B$, alors l'inégalité est stricte.

DVP1 Th. (29) : (ellipsoïde de John-Loewner)
Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K de volume minimal.

2) Convexité de l'exponentielle $(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré [BP]

Prop. (30) : (inégalité de Hölder) 155
Soient $p,q\ge1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^q(\ )$.
Alors, $fg\in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$

Prop. (31) : (inégalité de Minkowski)
Soit $p\ge1$, $f,g\in L^p(\mu)$. Alors $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$ 157

Coro (32) : Soit $p\ge1$. Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé

Prop. ( ) : $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est strictement convexe

Coro. ( ) : Soient $a,b\ge0$, $p,q\ge1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
Alors $ab\le\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$

Prop. (33) : Si $\mu(X)<+\infty$, alors si $q\ge p\ge1$, $L^p(\mu)\supset L^q(\mu)$ ♡

Appli. (34) : $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})\supset L^2_{2\pi}(\mathbb{R})\supset\dots\supset L^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$.

III. Fonctions convexes : extremum et optimisation

1) Caractérisation sur $\mathbb{R}^n$ et extremums [Lia]

Th. (35) : Soit $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, C convexe $\subset U$ et $f: U\to\mathbb{R}$ une application
On suppose f différentiable sur U. Alors : 155
1) f est convexe $\overset{\text{sur } C}{}$ SSI : $\forall x,y\in C$, $f(y)-f(x)\ge df(x)(y-x)$
2) f est strictement convexe $\overset{\text{sur } C}{}$ SSI : $\forall x,y\in C$, $f(y)-f(x)>df(x)(y-x)$.

On suppose f deux fois différentiable sur U. Alors : [Rou]
1) f est convexe sur C SSI $\forall x\in C,\forall h\in\mathbb{R}^n$, $d^2f(x)(h,h)\ge0$ 329
2) f est strictement convexe sur C SSI $\forall x\in C,\forall h\in\mathbb{R}^n$, $d^2f(x)(h,h)>0$

253
②

[Cia] **Th. 36 :** Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1) si $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local en un point, alors c'est un minimum global.

2) si $f : C \to \mathbb{R}$ est strictement convexe, alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict

156 3) si $f : C \subset U \to \mathbb{R}$ est convexe sur C et différentiable en $x \in U$, alors elle admet un minimum sur C en x ssi : $\forall y \in C,\ df(x)(y-x) \geq 0$ *(inégalité d'Euler)*

4) si C est ouvert, alors l'inégalité d'Euler de 3) équivaut à l'équation d'Euler : $df(x) = 0$.

Th. 37 : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie fermée, non vide et non bornée.

175 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue.
Si $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$ alors : $\exists x \in A \ /\ f(x) = \inf_{y \in A} f(y)$

2) Algorithme du gradient à pas optimal

Cadre 38 : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $\langle x,y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ et $\|x\|_A = \sqrt{\langle x,x \rangle_A}$

[Ben] Soit $\bar{x}$ l'unique solution de $Ax = b$ et

$$\Phi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \end{array}.$$

On notera $\|\cdot\|$ pour $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$

159+ **Prop. 39 :** Φ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$ en $\bar{x}$

Lemme 40 : *(Kantorovich)*

Soient $\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$ les vp de A et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

DVP2 Alors $\dfrac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \, \|x\|_{A^{-1}}^2} \geqslant 4 \times \dfrac{\lambda_{max} \times \lambda_{min}}{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}$

Th. 41 : *(algorithme du gradient à pas optimal)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par : DVP2

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla \Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \Phi(x_k)\|_A^2} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \Phi(x_k) \end{cases}$$

Alors, $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x}$

3) Méthode de Newton

[Rou]

Exo 42 : Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}$ et $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle 152
que $f(c) < 0 < f(d)$. On suppose $f' > 0$.

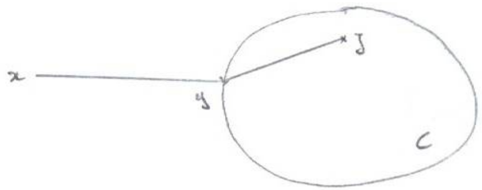
1) Mq $\exists !\ a \in]c,d[\ /\ f(a) = 0$. On pose $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

2) Mq $\exists \alpha > 0 \ /\ \forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $F^n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

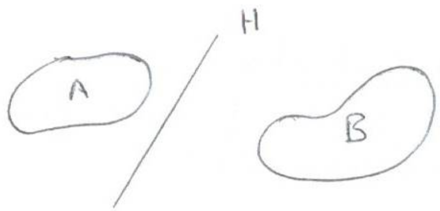
3) si f est strictement convexe, mq :
$\forall x_0 \in [a,d]$, $F^n(x_0) \searrow a$.

ANNEXE

Th. 9 :



Déf. 17 :



Déf. 26 :