250. Transformation de Fourier - Applications.

Notations : Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on écrira L^p pour $L^p(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. m est la mesure telle que $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$.

I. Rappels sur les espaces L^p

[Ru]

Th.① : (Riesz-Fischer)
Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet. L^2 est alors un espace de Hilbert.

Déf./Th② : Soit $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$. Alors $\tau : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to L^p \\ a \mapsto \tau_a f \end{array}$ est bien définie et continue.

Th.③ : Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors :

1) si $f \in L^\infty$ et f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f * \varphi_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$
2) si $f \in L^\infty$ et f est uniformément continue, alors $\|f - f*\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3) si $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\|f - f*\varphi_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

II. Transformation de Fourier dans L^1

1) Définitions, premières propriétés

Déf.④ : Soit $f \in L^1$. La transformée de Fourier de f est l'application $\hat{f} : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} \, dm(x)$.
L'application $\mathcal{F} : f \in L^1 \mapsto \hat{f}$ est appelée transformation de Fourier.

[Fa]
Ex.⑤ : Soit $\alpha > 0$
130
1) $f(x) = \frac{1}{2\alpha} \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x) \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sin \alpha t}{\alpha t}$
2) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \Rightarrow \hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$

Prop.⑥ : $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ est une application linéaire continue.

Prop.⑦ : Soit $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. [Ru]

1) si $g(x) = f(x) e^{i\alpha x}$ alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha) = \tau_\alpha \hat{f}$
2) si $g = \tau_\alpha f$, alors $\hat{g}(t) = e^{-i\alpha t} \hat{f}(t)$ 220
3) si $g \in L^1$, alors $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$
4) si $g(x) = \overline{f(-x)}$, alors $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$
5) si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, alors $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$
6) si $g(x) = -ix f(x)$ et $g \in L^1$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = \hat{g}$.
7) si $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1$, alors $\widehat{f'}(t) = it \hat{f}(t)$. [Fa] 132

Exo⑧ : Soit $\alpha > 0$ et $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$. Montrer que $\hat{f}$ est solution de $y' = -\frac{t}{2\alpha} y$ et en déduire que $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ [Fa] 130

Th.⑨ : (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Si $f \in L^1$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Coro.⑩ : $\mathcal{F} : L^1 \to (\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire continue.

2) Théorème d'inversion dans L^1 [Ru]

Déf./Prop.⑪ : Soit $\varphi : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{1+x^2}$. Alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dm = 1$ et :

1) la suite $(h_\lambda)_{\lambda > 0}$ définie par $h_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation continue de l'unité. 223
2) soit $H : t \mapsto e^{-|t|}$. Alors $0 \leq H(\lambda t) < 1$ pour $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, et $(t \mapsto H(\lambda t))$ croît vers 1 lorsque $\lambda \to 0$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt} \, dm(t)$
4) $\forall f \in L^1$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$$

Th. 12 : Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, et si $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$, alors $g \in \mathcal{C}_0$ et $f = g$ p.p.

Coro. 13 : $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \mathcal{C}_0$ est injective

III. Extensions de la transformation de Fourier

1) Extension à L^2

[Ru] Notation 14 : pour $A > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on notera $k_A f = 1_{[-A,A]} \cdot f$

Th. 15 : (Fourier-Plancherel)
Pour tout $f \in L^2$, on peut associer $\hat{f} \in L^2$ telle que :
1) si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.
225 2) $\forall f \in L^2$, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$
DVP1 3) $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^2 \longrightarrow L^2 \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert

4) si $\varphi_A = k_A f$, alors $\|\hat{f} - \hat{\varphi}_A\|_2 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Rq 16 : Dans la pratique, on notera également $\mathcal{F}$ le prolongement de la transformation de Fourier à L^2.

Coro 17 : (formule de Plancherel)
Si $f, g \in L^2$, alors $\int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, dm = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \bar{\hat{g}} \, dm$.

[Ba] Appli. 18 : (intégrale de Dirichlet)
264 Soit $f = 1_{[-1,1]}$. Calculer $\mathcal{F}(f)$ et en déduire la valeur de
⚠ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ à l'aide de l'identité de Parseval

2) Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

Déf. 19 : L'espace de Schwartz $S = S(\mathbb{R})$ est : [Zu] 107
$S = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \}$

Ex. 20 : 1) $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S$
2) $x \longmapsto e^{-x^2} \in S$
3) $\forall z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0$, $x \longmapsto e^{-zx^2} \in S$

Prop. 21 : Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $S \subset L^p$.

Coro. 22 : Pour tout $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ♡++

Th. 23 : Si $f \in S$, alors $\hat{f} \in S$.

Th. 24 : Si $f \in S$, alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Appli 25 : Si $f \in L^2$ et $\hat{f} \in L^1$, alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$ [Ru]
pour tout $x \in \mathbb{R}$. 225
On a alors : pour tout $f \in L^2$, $\|f - \Psi_A\|_2 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
où $\Psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} k_A \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$

IV. Applications

1) Résolution d'une EDP

Problème 26 : (équation de la chaleur) [Fa] 175
Soit $T > 0$. On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^0([0,T[\times \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{C}^2(]0,T[\times \mathbb{R})$ telle que :
(1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\forall (t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}$
(2) $u(0,x) = f(x)$ $\forall x \in [0,T]$ où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Th. 27 : Soit $g :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (noyau de Gauss).

175 Soit $f \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $u :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(t,x-y) f(y)\,dy$

Alors u est solution de l'équation de la chaleur et $\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

2) Injectivité de la transformation de Fourier

[BMP] **Déf. 28 :** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. ρ est appelée

110 une fonction poids et $L^2(I,\rho) = \{ f : I \to \mathbb{R} \ / \int_I |f|^2 \rho\,dx < +\infty \}$.

Prop. 29 : $L^2(I,\rho)$ muni de $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f\bar{g}\rho\,dx$ est un espace de Hilbert.

Déf. 30 : On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique famille de polynômes unitaires tels que $\deg P_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, orthonormaux sur $L^2(I,\rho)$ obtenus par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

140 **Th. 31 :** On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$

DVP 2 Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

111 **Ex. 32 :** $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. Alors les polynômes orthogonaux obtenus, appelés polynômes de Hermite, sont tels que :

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$

et plus généralement : $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

Références:

- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [Fa] Faraut, *Calcul intégral*
- [Ber] Bernis, *Analyse: 40 développements*
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation*
- [Zu] Zuily, *Éléments de distributions et d'EDP*