246 - Séries de Fourier - Exemples et applications

I. Introduction, définitions et premières propriétés

1) Introduction

Introduction historique : équation de la chaleur dans un Tore

2) Définitions

Déf. ① : . $\mathcal{C}^0(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique$\}$

- si $n \in \mathbb{Z}$, en désigne la fonction $t \mapsto e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$. $e_n \in \mathcal{C}^0(T)$
- si $1 \leq p < +\infty$: $L^p(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable, 2π-p., $\|f\|_p < +\infty\} /_{\text{"}=pp\text{"}}$
  où $\|f\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt$
- si $p = +\infty$: $L^\infty(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable, 2π-p. essentiellement bornée$\} /_{\text{"}=pp\text{"}}$
  et $\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : m(\{x \in \mathbb{R}, |f(x)| > c\}) = 0\}$

Rq ② : $L^2(T)$ muni de $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g}(t)\,dt$ est un espace préhilbertien, et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(T)$

Déf. ③ : Si $f \in L^1(T)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle :

- n-ième coefficient de Fourier complexe de f le nombre complexe
  $$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$
- n-ièmes coefficients de Fourier réels de f les nombres complexes
  $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

On pose alors $\gamma : \begin{array}{l} L^1(T) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ qui est une application linéaire continue

Rq. ④ : Si f est T-périodique intégrable sur $[0,T]$, on définit de même $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-\frac{2i\pi}{T}nt}\, dt$

Déf. ⑤ : Soit $f \in L^1(T)$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ (lorsqu'elle existe), et on note pour $N \in \mathbb{N}$ $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ les sommes partielles

Rq ⑥ : $S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right)$

3) Propriétés des espaces $L^p(T)$, produit de convolution

Th. ⑦ : (Riesz-Fischer)
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(T), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

Coro ⑧ : $(L^2(T), \langle,\rangle)$ est un espace de Hilbert

Th. ⑨ : si $1 \leq p \leq +\infty$, $\{$fonctions étagées intégrables$\}$ est dense dans $(L^p(T), \|\cdot\|_p)$
De plus, si $1 \leq p < +\infty$, $\{$fonctions en escalier intégrables$\}$ et $\mathcal{C}_c^0 = \{$fonctions continues à support compact$\}$ sont denses dans $(L^p(T), \|\cdot\|_p)$

Déf./Prop ⑩ : Soit $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(T)$ et $a \in \mathbb{R}$.
On définit $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors $\tau_a f \in L^p(T)$ et $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$

Rq ⑪ : $[0, 2\pi]$ est de mesure finie donc pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $L^p(T) \supset L^q(T)$ et $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ (Hölder)

Déf. ⑫ : Soient $f, g \in L^1(T)$. Le produit de convolution de f et g est défini par $f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Prop. ⑬ :
i) $f * g = g * f$
ii) Si $f \in L^1(T)$ et $g \in L^1(T)$, alors $f * g \in L^1(T)$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$
iii) si $f \in L^1(T)$ et $g \in L^\infty(T)$, alors $f*g \in L^\infty(T)$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$
De plus, $f*g$ est continue

Rq ⑭ : $L^1(T)$ muni du produit de convolution est une algèbre de Banach non unitaire.

4) Propriétés $n, k \in \mathbb{Z}$; $f \in L^1(T)$; $a \in \mathbb{R}$

Prop. ⑮ : i) $c_n(\tilde{f}) = c_{-n}(f)$ où $\tilde{f}(t) = f(-t)$
ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$
iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
v) $f * e_n = c_n(f)\, e_n$
vi) si $g \in L^\infty(T)$, $c_n(f*g) = c_n(f)\,c_n(g)$
vii) si $f \in \mathcal{C}^0(T)$ et $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(T)$, alors $c_n(f') = in\, c_n(f)$

Th. (16) : (Riemann-Lebesgue)

Si $f \in L^1(T)$, alors $c_n(f) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0$. On a donc $\gamma : L^1(T) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$ et γ est continue.

II. Premiers résultats de convergence. Noyaux

1) L'exemple de $\mathcal{C}^2(T)$

Prop. (17) : $\gamma : \mathcal{C}^0(T) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$ est injective

Prop. (18) : Soit $f \in \mathcal{C}^2(T)$. Alors $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, et $S(f) = f$.

Rq (19) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et 2π-périodique définie par : pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$.

Alors f est continue, mais $S_N(f)$ diverge en 0.

2) Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Déf. (20) : Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle noyau de Dirichlet d'ordre N la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$

Prop. (21) : i) D_N est pair, 2π-périodique et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} \neq 1$, $D_N(x) = \dfrac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

iii) $\forall f \in L^1(T)$, $S_N(f) = f * D_N(f)$

Déf. (22) : • Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle noyau de Féjer d'ordre N la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$

• Pour $f \in L^1(T)$, on appelle N-ième somme de Césaro de f la fonction $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

Prop. (23) : i) $\forall x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} \neq 1$, $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \geq 0$

ii) K_N est pair, 2π-périodique et $\|K_N\|_1 = 1$

iii) si $0 < \delta \leq \pi$, alors $\frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]^c} K_N(t)\,dt \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

iv) soit $f \in L^1(T)$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sigma_N(f) = f * K_N$

III. Principaux théorèmes de convergence. Premières applications

Th. (24) : (Féjer)

1) Si $f \in \mathcal{C}^0(T)$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

2) Si $f \in L^p(T)$ où $1 \leq p < +\infty$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|f - \sigma_N(f)\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Appli. (25) : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(T)$.

En particulier, si $f \in L^2(T)$ alors : • $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

• $\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Appli. (26) : Soit $f \in \mathcal{C}^0(T)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell$, alors $\ell = f(x_0)$

Appli. (27) : Soit $f \in \mathcal{C}^0(T)$ et $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(T)$.

Alors $S_N(f)$ converge normalement et $f = S(f)$.

DVP 1

Th. (28) : (Dirichlet) ++ γ injective !!

Soit $f \in L^1(T)$.

Si : • $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ existent

• $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$ existent

Alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

Rq (29) : Si $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(T)$, alors f vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

IV. Exemples et applications des théorèmes de convergence

Appli. 30 : $\gamma : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$ est injective

Exemples de calcul 31 :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Th. 32 : (Weierstrass)

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes algébriques

Appli. 33 : Résolution des EDP : équation de la chaleur (barre)

Soit $Q =]0,L[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,L] \times [0,+\infty[$ $(L>0)$

Il existe une unique fonction u telle que :

DVP 2

(1) $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q})$ $u \in \mathcal{C}^2(Q)$

(2) (E) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ pour $(x,t) \in Q$

(3) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour $t \in [0,+\infty[$

(4) $u(x,0) = h(x)$ pour $x \in [0,L]$,

où $h \in \mathcal{C}^1([0,L])$, $h(0) = h(L) = 0$ et $h \not\equiv 0$

Appli. 34 : Inégalité isopérimétrique

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé simple de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$, de longueur L et enfermant une surface S.

Alors, $L^2 \geq 4\pi S$

et $L^2 = 4\pi S \iff \gamma([a,b])$ est un cercle

Appli. 35 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0,r) \subset \overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$. On note $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 \, d\theta$.

Coro. 36 : (Th. de Liouville)

Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si f est bornée, alors f est constante.

Références :

Zuily, Queffélec : *Analyse pour l'agrégation* (80% de la leçon)

- à partir p. 69
- Th. 30 : p 87
- simplification hypothèses Th. 27 (Dirichlet) : p 89
- Appli 34 : p 103 - 105
- Appli 33 : p 106 - 109

Rudin : *Analyse réelle et complexe*

- Th. 6 (Riesz-Fischer) et un peu Th. 8 : p 88 - 85
- continuité translations dans L^p (Déf / Prop. 10) : p 222
- convolution, preuve "propre" de la mesurabilité : p 207 - 208

Gourdon : *Analyse* (3e édition)

- Rq 6 : p 269
- Rq 19 : p 275