241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

<u>Cadre</u>: X est un ensemble, $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de X vers E, $f: X \to E$. On notera S_n les sommes partielles de la série $\sum f_n$.

I. Différents types de convergence

[EA] ### 1) Convergence simple :

133 <u>Déf. 1</u>: On dit que (f_n) converge simplement (cvs) vers f, noté $f_n \xrightarrow[n]{cvs} f$ (sur X) si : $\forall x\in X, \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, n\geq N \Rightarrow \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon$.

140 <u>Ex. 2</u>: Si $f_n : x\in[0,1] \mapsto x^n$, et $f = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } 0\leq x<1 \end{cases}$, alors $f_n \xrightarrow[n]{cvs} f$

189 <u>Déf. 3</u>: On dit que $\sum f_n$ cvs vers f si $S_n \xrightarrow[n]{cvs} f$. On définit alors pour tout $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$: $R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

[EA] ### 2) Convergence uniforme

143 <u>Déf. 4</u>: On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X vers E. $\mathcal{B}(X,E)$ muni de $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ est un evn.

~145 <u>Th. 5</u>: Si E est complet, alors $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

140 <u>Déf. 6</u>: On dit que (f_n) converge uniformément (cvu) vers f sur X, noté $f_n \xrightarrow[n]{cvu} f$ si : $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, \forall n\geq N, \begin{cases} \forall x\in X, \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon. \end{cases}$

190 <u>Déf. 7</u>: On dit que $\sum f_n$ cvu vers f si $S_n \xrightarrow[n]{cvu} f$ sur X

140 <u>Prop. 8</u>: $f_n \xrightarrow[n]{cvu} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[n]{cvs} f$

<u>Rq. 9</u>: La réciproque est fausse : dans Ex. 2, $\|x^n - f(x)\|_\infty = 1 \;\; \forall n\in\mathbb{N}$

♡ <u>Ex. 10</u>: Si $f_n : x\in[-1,1] \mapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$, $f : x\in[-1,1] \mapsto |x|$. Alors $f_n \xrightarrow[n]{cvu} f$

<u>Th. 11</u>: (*critère de Cauchy uniforme*)
On suppose E complet. Alors, (f_n) (resp. $\sum f_n$) cvu vers f ssi :
142 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, \forall p\geq q\geq n, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$ (resp. $\|\sum_{k=q}^{p} f_k\|_\infty \leq \varepsilon$)

3) Convergence absolue, convergence normale. [EA]

<u>Déf. 12</u>: On dit que $\sum f_n$ converge absolument (CA) si pour tout $x\in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ cvs dans $\mathbb{R}^+$. 192

<u>Prop. 13</u>: Si E est complet, $\sum f_n$ CA $\Rightarrow \sum f_n$ CVS

<u>Rq. 14</u>: Réciproque fausse. C-ex : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ♡++

<u>Déf. 15</u>: On dit que $\sum f_n$ converge normalement (CVN) si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\mathcal{B}(X,E)$ et $\sum\|f_n\|_\infty$ cvs dans $\mathbb{R}^+$. 193

<u>Prop. 16</u>: Si E est complet, $\sum f_n$ CVN $\Rightarrow \sum f_n$ CVU 193

<u>Rq. 17</u>: Réciproque fausse. C. Ex : $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0,1]$ ♡++

4) Cas de $L^p(\mathbb{R})$, $1\leq p<+\infty$ [Ru]

<u>Déf. 18</u>: Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$. On pose $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}^+}$
$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}, f \text{ mesurable et } \|f\|_p<+\infty\} / \text{"}=\text{pp"}$

<u>Th. 19</u>: $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach (*Riesz-Fischer*) 82

<u>Coro. 20</u>: Soient $(f_n), f\in L^p(\mathbb{R})$ telles que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n]{} 0$. Alors il existe une sous-suite de (f_n) qui cvs vers f pp. 83

<u>Rq. 21</u>: On ne peut pas faire mieux que "cvs pp" !

II. Régularité de la limite. [EA]

1) Continuité

<u>Cadre 22</u>: X est une partie (non vide) d'un evn de dimension finie.

<u>Th. 23</u>: Soit $a\in X$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en a. 145
Alors, si (f_n) cvu vers f, alors f est continue en a.

<u>Coro 24</u>: $(\mathcal{C}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est fermé, et donc complet si E est complet. ~146

<u>Rq. 25</u>: Le coro 24 joue un rôle fondamental dans la démonstration ♡++
de théorèmes comme celui de Cauchy-Lipschitz (local) ou encore d'Ascoli.

Rq (26) : La CVS ne suffit pas pour que f soit continue (voir Ex. (2))

Rq (27) : Si les $(f_n)_n$ sont continues, alors la CVU sur tout compact de X suffit pour que f soit continue.

Appli (28) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

2) Différentiabilité $q, p \in \mathbb{N}^*$

[Rou] ~ 117 Th. (29) : Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert convexe, $(f_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une suite d'applications différentiables sur U. Si

1) $\exists x_0 \in U$ / $(f_n(x_0))$ CVS

2) (df_n) converge localement uniformément sur U vers $\Phi : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$

Alors (f_n) converge localement uniformément vers une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$. De plus, f est différentiable sur U et $df(x) = \Phi(x)$ $\forall x \in U$

Appli. (30) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Rq (31) : La CVU de (f_n) ne suffit pas pour que f soit différentiable (voir Ex. (10))

3) Holomorphie

[Tau] 89 Th. (32) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si (f_n) CVU sur tout compact de Ω vers f, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \lim\limits_n f_n^{(k)}$.

[BMP] 82 Appli (33) : La version "méromorphe" du Th. (32) permet de montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\Gamma(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$

III. Interversion somme et intégrale

1) CVU et intégrale de Riemann

[ECA] Cadre (34) : a et b sont deux réels, $a < b$. $(f_n) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

151 Th. (35) : Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui CVU vers f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

Th. (36) : (Weierstrass)

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. 158

[Gou]

Appli. (37) : (Théorème des moments)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = 0$. 306

Alors, f est identiquement nulle.

2) Intégrale de Lebesgue [BP]

Cadre (38) : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. (f_n), $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Th. (39) : Si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives et mesurables qui CVS vers f, alors f est mesurable et $\int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$ 117

(Théorème de convergence monotone (TCM))

Appli. (40) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{\alpha t} \, dt$ 126

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Th. (41) : (Lemme de Fatou)

Si (f_n) est une suite de fonctions positives et mesurables, alors 132

$$\int_X \underline{\lim_n} f_n(x) \, d\mu \leq \underline{\lim_n} \int_X f_n(x) \, d\mu$$

Appli. (42) : Soit (f_n) suite de fonctions intégrables qui CVS vers f et telles que $\sup\limits_n \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$. Alors, f est intégrable. 132

Th. (43) : (Théorème de convergence dominée (TCD))

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telles que $f_n \xrightarrow[n]{CVS} f$ μ pp. 134

On suppose qu'il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp. en x. (domination)

Alors, f est intégrable et $\int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$

Appli. (44) : $\forall z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0$, $\Gamma(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, dt$ [ZQ] 313

241 ②

IV. Séries entières (S.E.)

Cadre 45 : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$. On considère la série entière $\sum a_n z^n$. [AA]

Déf./Prop. 46 : Soit $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ tel que $\frac{1}{R} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$. Alors,

233 1) si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ CA et on note f sa somme.

230 2) si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

R est appelé rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $D(0,R)$ disque de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\mathcal{C}(0,R)$ cercle d'incertitude de $\sum a_n z^n$.

Rq 47 : On ne sait a priori rien sur le comportement de la série entière ni de sa somme sur le cercle d'incertitude :

231 1) $\sum (-1)^n z^n$: $R = 1$, $f(z) = \frac{1}{1+z}$. La SE diverge sur $\mathcal{C}(0,1)$ mais f est bien définie

2) $\sum \frac{z^n}{n}$: $R = 1$, converge sur $\mathcal{C}(0,1)\setminus\{1\}$, diverge en 1

3) $\sum \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$, CVN sur $\overline{D}(0,1)$.

[Gou] Th. 48 : (Abel angulaire)

263 Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R = 1$ telle que $\sum a_n$ converge de somme S. Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et f la somme de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,1)$. On pose

DVP1 $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1$ et $\exists\, \rho > 0,\ \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \,/\, z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

Alors : $f(z) \xrightarrow[z \in \Delta_{\theta_0}]{z \to 1} S$

Appli. 49 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

264 Rq 50 : Réciproque fausse, voir Rq 47 1)

Th. 51 : (taubérien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R = 1$ et de somme f sur $D(0,1)$

DVP1 On suppose que : $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $f(x) \xrightarrow[|x|<1]{x \to 1} S \in \mathbb{C}$.

Alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

V. Séries de Fourier

Déf. 52 : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (Tore), $L^p(\mathbb{T}) : \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable 2π-p $/ \|f\|_p < +\infty \}$ pour $1 \le p \le +\infty$ où $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p \,dt \right)^{1/p}$ pour $1 \le p < +\infty$. [ZQ]

On notera $c_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z})$ les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ et $S(f)$ la limite de $(S_N(f))$ lorsqu'elle existe.

Lemme 53 : (Riemann - Lebesgue) 73

$\forall f \in L^1(\mathbb{T})$, $c_n(f) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0$.

Déf./Prop 54 : $N \in \mathbb{N}$: $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$ $(N \geq 1)$. 75 76

(K_N) est une approximation de l'unité.

Th. 55 : (Fejér) 84

1) Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $f * K_N \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $\|f - f * K_N\|_\infty \xrightarrow[N]{} 0$

2) Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $f * K_N \in L^p(\mathbb{T})$ et $\|f - f * K_N\|_p \xrightarrow[N]{} 0$ $(1 \le p < +\infty)$

Coro 56 : 1) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, et : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N]{} 0$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ 86

2) Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, $(S_N(f))$ CVN vers f et $f = S(f)$.

Appli. 57 : A l'aide de la fonction f 2π-périodique telle que $f_{|[-\pi,\pi]} = -1_{[-\pi,0]} + 1_{[0,\pi]}$, mq $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ♡

Appli. 58 : (équation de la chaleur dans une barre)

Soit $Q =]0,\pi[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,\pi] \times [0,+\infty[$. Déterminer u telle que 106

(1) $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q})$ et $u \in \mathcal{C}^2(Q)$

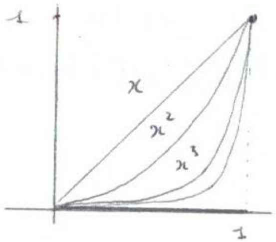
(2) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\forall (x,t) \in Q$ DVP2

(3) $u(0,t) = u(\pi,t)$ $\forall t \in [0,+\infty[$

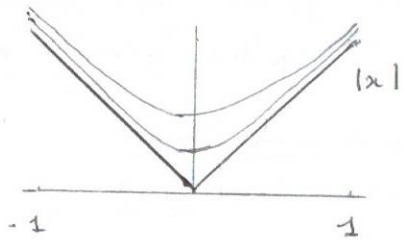
(4) $u(x,0) = h(x)$ $\forall x \in [0,\pi]$ où $h \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$

ANNEXE

Ex. (2) :



Ex. (10) :



Références :

- [ElA] El Amrani, *Suites et séries...*
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [Rou] Rouvière, *PGdCD*
- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe pour la L3*
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation* (2e éd.)
- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [BP] Briane, *Théorie de l'intégration*
- [ZQ] Zuily Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4e éd.)