239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I. Régularité

Cadre ①: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, (E, d) est un espace métrique.

On considère $f : \begin{array}{l} E \times X \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t,x) \longmapsto f(t,x) \end{array}$ et $F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$.

1) Continuité

[BP] ~ 138 Th. ②: On suppose que:

1) $\forall t \in E$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable
2) μ pp. en x, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue sur E.
3) il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, intégrable telle que:
$\forall t \in E$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ μ pp en x (domination)

Alors: F est bien définie et continue sur E.

Rq ③: Une hypothèse de domination sur tout compact suffit.

Ex. ④: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt}\, dx$.

140 Alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Rq ⑤: $\hat{f}$ est même uniformément continue sur $\mathbb{R}$

2) Dérivabilité

Cadre ⑥: $E = I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

[BP] ~ 141 Th. ⑦: Soit $x_0 \in X$. On suppose que:

1) $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable
2) $\exists A \in \mathcal{A}$, $\mu(A^c) = 0$ tel que:
   i) $\exists t_0 \in I$ / $x \longmapsto f(t_0, x)$ est intégrable sur A
   ii) $\forall x \in A$, $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$
   iii) $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists g_K : A \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, intégrable telle que:
   $\forall (t,x) \in K \times A$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g_K(x)$ (domination)

Alors: F est bien définie et dérivable sur I de dérivée $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$

Rq ⑧: ⚠ à l'utilisation des "μ-pp" dans ce théorème. Il ne s'applique par exemple pas à $F(t) = \int_0^t 1_{[0,A]}(x)\, dx$ où $A > 0$.

Appli. ⑨: (étude de la fonction Γ réelle) DVP1

On pose pour $x > 0$: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Montrons que:

Γ est bien définie, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$, Γ et $\ln \Gamma$ sont convexes,

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$ et $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (Euler-Gauss)

Ex. ⑩: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \longmapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable de dérivée $\hat{f}'(t) = -i\, \widehat{xf}(t)$

3) Holomorphie

Cadre ⑪: $E = \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$. On écrira $f : \begin{array}{l} \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C} \\ (z,t) \longmapsto f(z,t) \end{array}$ [AM]

Th. ⑫: On suppose que: 94

1) $\forall z \in \Omega$, $t \longmapsto f(z,t)$ est mesurable
2) $\forall t \in X$, $z \longmapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω
3) $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $\exists g_K : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, intégrable telle que:
$\forall (z,t) \in K \times X$, $|f(z,t)| \leq g_K(t)$ (domination)

Alors: F est bien définie, $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\, d\mu(t)$.

Ex. ⑬: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, s > 1\}$

Appli. ⑭: (prolongement méromorphe de la fonction Γ) [BMP] 82 DVP2

Soit $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ pour $z \in \mathcal{P}$.

Montrer que $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathcal{P})$ et que Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ tel que $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

II . Produit de convolution

Cadre (15) : Pour $1 \leq p \leq \infty$, on notera $L^p = L^p(\mathbb{R})$

1) Définition, premières propriétés

[Fa] ~ 117 Déf. (16) : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. Lorsqu'il est bien défini, leur produit de convolution est :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

Th (17) : (inégalité de Young)
Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$.
Alors, $f * g \in L^r$ et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

~ 120 Prop. (18) : Si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, alors $f*g \in L^\infty$ et $f*g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Prop. (19) : $(L^1, +, \times, *)$ est une algèbre associative, commutative non unitaire.

Th. (20) : Si $f \in L^p$ et $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ où $k \in \overline{\mathbb{N}}$, alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$
123 et pour tout $0 \leq p \leq k$, $(f*g)^{(p)} = f * g^{(p)}$.

2) Approximation de l'unité : définition et construction

Déf. (21) : Une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable et positive
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dx = 1$
3) $\forall \delta > 0$, $\int_{[-\delta,\delta]^c} \varphi_n\, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On dit de plus qu'elle est à support compact s'il existe $K \subset \mathbb{R}$ un compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K$. Si $(\varphi_n)_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on dit que c'est une suite régularisante

Prop. (22) : Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive, mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx = 1$, alors $(\varphi_n)_n$ définie par $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ $n \geq 1$ est une approximation de l'unité.

Ex. (23) : $\varphi : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ permet de définir une approximation de l'unité $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. (voir ANNEXE)

Ex. (24) : si on prend comme mesure $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, alors la "suite" $h_\lambda : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation de l'unité continue lorsque $\lambda \to 0$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) Convolution et régularisation

Cadre (25) : $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une approximation de l'unité. [BP]

Th. (26) : 1) Soit $f \in L^\infty$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x_0, 272
alors $f * \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_0)$
2) Si $f \in L^\infty$ est uniformément continue, alors $\|f - f*\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

IRq (27) : S'applique à $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$!

Th. (28) : Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p$. Alors, $\|f - f*\varphi_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 270

Th. (29) : Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 275

Th. (30) : Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$

Notations (31) : $1 \leq p \leq +\infty$ $L^p(T) = \{f \in L^p,\ f\ 2\pi\text{-périodique}\}$. $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ [ZQ]

Prop. (32) : Le noyau de Féjer $K_N(x) = \frac{1}{N} \times \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}}$ est une approximation de l'unité sur T 76

Appli. (33) : $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(T)$, 86
et pour tout $f \in L^2(T)$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle f, e_n\rangle}_{c_n(f)} e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Ex. 34 : Soit f 2π-p. telle que $f|_{[-\pi,\pi]} = -1_{[-\pi,0]} + 1_{[0,\pi]}$.
Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

[ZQ] **Appli. 35 :** Si $f \in \mathcal{C}^0(T)$ et $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(T)$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. On peut alors résoudre l'équation de
106 la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[$ (barre) avec une condition initiale du type $u(0,x) = h(x)$ où $h \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$)

III. Transformation de Fourier

1) Définition et principales propriétés

[Ru] **Déf. 36 :** Soit $f \in L^1$. L'application $\hat{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt}\, dm(x)$ où $dm = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$
219 est appelée transformée de Fourier de f. $\mathcal{F} : f \in L^1 \mapsto \hat{f}$ est appelée transformation de Fourier.

[Fa] **Ex. 37 :** $\alpha > 0$. $f = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]} \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{\sin at}{a} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
130 $f(x) = e^{-a|x|} \Rightarrow \hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2a}{a^2+t^2}$

[Ru] **Prop. 38 :** Soit $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$
1) $g(x) = f(x)e^{i\alpha x} \Rightarrow \hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$ 2) $g(x) = f(x-\alpha) \Rightarrow \hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$
220 3) $g \in L^1$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$ 4) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$
5) $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$

Lemme 39 : (Riemann-Lebesgue)
223 Si $f \in L^1$, $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Th. 40 : (inversion dans L^1)
224 Si $f \in L^1$, $\hat{f} \in L^1$, et $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t)$. Alors, $f = g$ pp.

225 **Coro 41 :** $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective

Th. 42 : (Fourier-Plancherel)
La transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme 225
isométrique de L^2 dans L^2.

Rq 43 : La démonstration du Th. 42 utilise l'approximation de l'unité de Ex. 24.

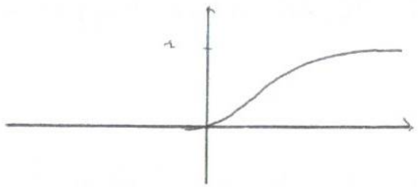
2) Application

Appli. 44 : Soit $L^2(I,\rho)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et ρ [BMP]
une fonction poids telle qu'il existe $a>0$, $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$. 110 +
Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, famille orthonormalisée par le procédé de 140
Gram-Schmidt de $(1, x, \dots, x^n \dots)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

ANNEXE

Ex. 23 :

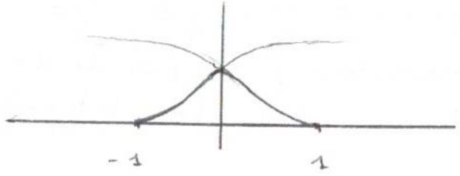
1)



$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

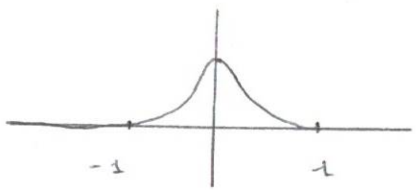
Mq $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

2)



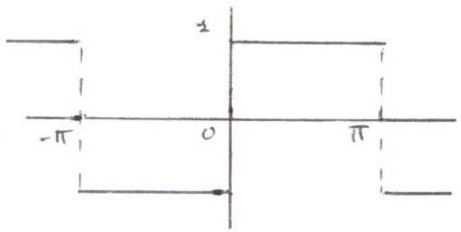
$$\theta(1+x)\,\theta(1-x)$$

4)



$$\varphi(x) = \frac{\theta(1+x)\,\theta(1-x)}{\int_{\mathbb{R}} \theta(1+t)\,\theta(1-t)\,dt}$$

Ex. 34 :



Références :

- [BP] Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
- [AM] Amar, Matheron, *Analyse complexe*
- [BMP] Beck..., *Objectif agrégation* (2e éd.)
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.
- [Fa] Faraut, *Calcul intégral*