I. Intégrale de Riemann

1) Primitive

Th. (1) : Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et F une primitive de f. Alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

[Gou] 142 **Ex. (2)** : Sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2 - 2} = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{x+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{3(x^2+1)}\right)$

donc $F(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \dfrac{1}{3}\arctan x + C$, $C \in \mathbb{R}$

[Rud] **Ex (3)** : $dm(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\,dm(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

223 **Appli. (4)** : $\lambda > 0$, $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \times \dfrac{1}{1+x^2}$. Alors $h_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda}\varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \times \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation continue de l'unité quand $\lambda \longrightarrow 0$

2) Intégration par parties

[Gou] 127 **Th. (5)** : Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Alors : $\displaystyle\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx$

Ex. (6) : *(intégrales de Wallis)*

130 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Alors pour $p \in \mathbb{N}^*$

DVP1 $$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p-1} = \frac{(2p-2)(2p-4)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}$$

219 **Appli. (7)** : *(Stirling)* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$

315 **Ex. (7)** : On pose pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

Alors pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et on a donc $\Gamma(n) = (n-1)!$

3) Sommes de Riemann

[Gou] 128 **Th. (8)** : Soit (σ, ξ) une subdivision pointée de $[a,b]$, i.e : $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|\sigma| < \alpha \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)\right| \leq \varepsilon$

Cons (9) : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$. 129

Rq (10) : Le cons (9) permet un calcul approché d'intégrales par la méthode des rectangles. (voir ANNEXE)

II. Intégrale de Lebesgue

1) Application des théorèmes de convergence

Th. (11) : *(théorème de convergence monotone)* [BP]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions mesurables et positives, $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ μ pp 117

Alors f est mesurable, positive et $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$

Ex. (12) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{\alpha t}\,dt$ 126

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Th. (12) : *(théorème de convergence dominée)*

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables et $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n \xrightarrow[n]{} f$ μ pp. On suppose qu'il existe $g : X \to \mathbb{R}$ positive, intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp. 134

Alors, (f_n), f sont intégrables et $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Appli (13) : Pour tout $x > 0$, DVP1

1) $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt$

2) $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ *(formule d'Euler-Gauss)*

(Rq : on utilise un changement de variables pour 2), voir II. 2))

2) Théorèmes de Fubini et de changement de variable

[BP] **Th.(14)** : (*Fubini-Tonelli*)

221 Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés où μ et ν sont σ-finies.
Soit $f:(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable. Alors :
1) $x\longmapsto\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y\longmapsto\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont définies partout et respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables
2) $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$

222 **Rq.(15)** : La condition du théorème de Fubini-Lebesgue est $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu\otimes\nu)$.

Th.(15) : (*changement de variables*)
Soit $V\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert, $f:V\longrightarrow K$ (où $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction intégrable,
239 $U\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert et $\varphi:U\longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Alors $\int_V f(x)\,dx=\int_U f\circ\varphi(y).|\det d\varphi(y)|\,dy$

Ex.(16) : $\varphi:\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^-\times\{0\})$
$(r,\theta)\longmapsto(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$
245 est le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme associé au passage en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$

Appli.(17) : Mq $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ à partir de $(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}\longmapsto e^{-x^2-y^2}$

Ex.(18) : On note V_d le volume de la boule unité euclidienne fermée
246 247 de $\mathbb{R}^d$. Alors : $V_{2d}=\frac{\pi^d}{d!}$ et $V_{2d+1}=2^{2d+1}\times\frac{\pi^d\times d!}{(2d+1)!}$

[FGN3] ~ 229 **Ex.(19)** : Si $P\in O_n(\mathbb{R})$, $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $x\longmapsto y=Px$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo tel que $|\det d\varphi(x)|=1$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

Appli.(20) : Soit $q\in Q^{++}$ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}_q=\{x\in\mathbb{R}^n\,/\,q(x)\leq 1\}$. Alors le volume de l'ellipsoïde est $V_q=\int_{\mathbb{R}}1_{\mathcal{E}_q}(y)\,dy=\frac{V_n}{\sqrt{\det q}}$

III. Fonctions holomorphes

Th.(21) : (*Théorème de Cauchy dans un convexe*) [Tau]
Soit Ω un ouvert convexe, $p\in\Omega$, f continue sur Ω et $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{p\})$. 76
Soit γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors, $\int_\gamma f(z)\,dz=0$. [BM]

Appli.(22) : En considérant $f:\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}$, $z\longmapsto\frac{e^{iz}}{z}$ et le contour tracé 260
en ANNEXE, montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$ (*intégrale de Dirichlet*)

Th.(23) : (*Théorème des résidus*) [Tau]
Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert, $a_1\neq\dots\neq a_n\in\Omega$ et $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$. Soit γ 141
un lacet dans Ω homotope à un point dans Ω tel que $a_k\notin\mathrm{Im}\,\gamma$ $\forall 1\leq k\leq n$.
Alors : $\int_\gamma f(z)\,dz=2i\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ind}_\gamma(a_k).\mathrm{Res}(f,a_k)$

Ex.(24) : Soient $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $2n-m\geq 2$. 189
Mq $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m}{1+t^{2n}}\,dt=\pi\times\frac{1-(-1)^{m+1}}{2n\sin\frac{(m+1)\pi}{n}}$

IV. Transformation de Fourier

Cadre(25) : On notera pour $1\leq p\leq+\infty$, $L^p=L^p(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}_0=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f(x)\xrightarrow[|x|\to+\infty]{}0\}$ [Ru]
$dm(x)=\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

1) Premières propriétés et théorème d'inversion

Déf.(26) : Pour $f\in L^1$, on pose $\hat{f}:t\in\mathbb{R}\longmapsto\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ixt}\,dm(x)$ et 219
$\mathcal{F}:f\in L^1\longmapsto\hat{f}$

Th.(27) : (*Riemann-Lebesgue*)
Si $f\in L^1$, alors $\hat{f}=\mathcal{F}(f)\in\mathcal{C}_0$ et $\|\hat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$ 223

Prop.(28) : $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$
1) $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}\Rightarrow\hat{g}(t)=\hat{f}(t-\alpha)$ 2) $g(x)=f(x-\alpha)\Rightarrow\hat{g}(t)=e^{-i\alpha t}\hat{f}(t)$ 220
3) Si $g\in L^1$, $\widehat{f*g}=\hat{f}\times\hat{g}$ 4) $g(x)=\overline{f(-x)}\Rightarrow\hat{g}=\overline{\hat{f}}$ 5) $g(x)=f(\frac{x}{\lambda})\Rightarrow\hat{g}(t)=\lambda\hat{f}(\lambda t)$

Prop. 29 : On rappelle que $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$ $(\lambda>0)$ est telle que $(h_\lambda)_\lambda$ est une approximation continue de l'unité quand $\lambda \to 0$.

223 On pose $H : t \mapsto e^{-|t|}$. Alors :

1) $\forall \lambda>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt} \, dm(t)$

2) $0 < H(t) \leq 1$ et $H(\lambda t) \longrightarrow 1$ lorsque $\lambda \to 0$.

223 **Prop. 30** : Si $f \in L^1$, alors $f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$

Th. 31 : (*inversion dans L^1*)

224 Soit $f \in L^1$. Si $\hat{f} \in L^1$ et $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$,

alors $g \in \mathcal{C}_0$ et $f = g$ pp.

2) Prolongement à L^2

[Ru] **Th. 32** : (*Fourier-Plancherel*)

BVP² $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme isométrique de L^2 dans L^2.

Si $f \in L^2$ et $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} \, dm(t)$, alors $\|f - \varphi_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

[Bu] **Appli. 33** : (*intégrale de Dirichlet bis*)

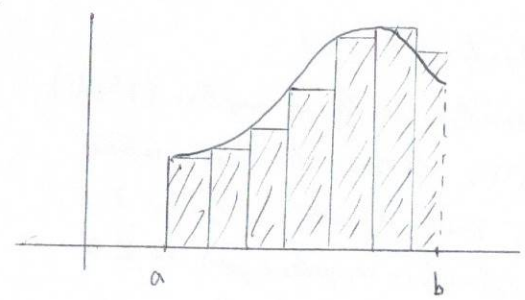
264 1) Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}) = \hat{f}$

2) Exprimer $\|\hat{f}\|_2^2$ en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$

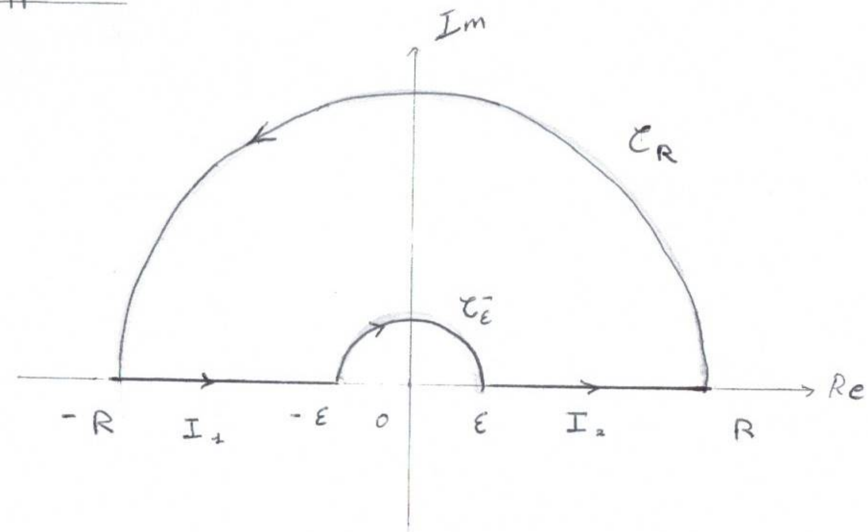
3) Conclure.

ANNEXE

Rq. 10 :



Appli. 22 :



Références :

- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [Ru] Rudin, Analyse réelle et complexe (3e éd.)
- [BP] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration
- [FGN3] Francinou, Oraux X-ENS Algèbre 3
- [Tau] Tauvel, Analyse complexe pour la L3
- [Be] Bernis, Analyse : 40 développements