234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(K)$, et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est muni de la mesure de Lebesgue.
$\mathcal{M}_K(\mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{K}, f \text{ mesurable}\}$ et $\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}, f \text{ mesurable}\}$

I. Construction de l'intégrale de Lebesgue

1) Intégrale des fonctions étagées positives

[Bri] Déf. ①: $s : X \to K$ est dite étagée s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$,
113 $\alpha_1 \dots \alpha_n \in K$ tels que $(A_1 \dots A_n)$ forme une partition de X, et $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$. Elle est alors mesurable, et on note $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{s : X \to K \text{ étagée}\}$ et $\mathcal{E}^+(\mathcal{A}) = \{s : X \to \mathbb{R}^+ \text{ étagée}\}$.

Rq ②: Les fonctions en escalier sont des fonctions étagées.

Déf. ③: Si $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, l'intégrale de Lebesgue (par rapport à μ)
114 de s est : $\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

Prop. ④: $s \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \mapsto \int_X s \, d\mu$ est additive, croissante, et
115 homogène positive.

Prop. ⑤: 1) Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $s \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Alors $\mathbb{1}_A s \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$,
116 et on définit $\int_A s \, d\mu = \int_X s \mathbb{1}_A \, d\mu$.
Si $A \cap B = \emptyset$, on a alors $\int_{A \cup B} s \, d\mu = \int_A s \, d\mu + \int_B s \, d\mu$.
2) Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{A}$ telle que $X = \bigcup_n E_n$ et $s \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, alors $\int_X s \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{E_n} s \, d\mu$

2) Intégrale des fonctions mesurables positives

Prop. ⑥: Si $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors il existe une suite croissante $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ telle que $(s_n)_n$ converge simplement vers f.

Déf. ⑦: Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. L'intégrale de Lebesgue de f par rapport
117 à μ est : $\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu, \ s \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \text{ et } s \leq f \right\}$.

Prop. ⑧: Si $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $f \leq g$, alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

Th. ⑨: (théorème de convergence monotone (TCM))
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $f = \lim_n f_n$. 117
Alors $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Prop ⑩: $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}) \mapsto \int_X f \, d\mu$ est additive et homogène positive. 118

Coro ⑪: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu$ 137

Prop. ⑫: (inégalité de Markov)
Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $a > 0$. Alors $\mu(f \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu$ 120

Coro ⑬: 1) $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. $\int_X f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ p.p. (presque partout)
2) $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. $\int_X f \, d\mu < +\infty \Rightarrow f$ est finie μ p.p. 120

Rq ⑭: Soient $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Si $f = g$ μ p.p., alors $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$. 119

Th. ⑮: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est Riemann-intégrable, alors f est Lebesgue-mesurable et $\int_{[a,b]} f \, dx = \int_a^b f \, dx$. 124

3) Fonctions Lebesgue-intégrables

Déf. ⑯: $f : X \to K$ est dite Lebesgue-intégrable si elle est mesurable 122
et si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf. ⑰: 1) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on note $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.
On définit alors $\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$.
2) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on définit $\int_X f \, d\mu = \int_X Re(f) \, d\mu + \int_X Im(f) \, d\mu$.

Ex. ⑱: Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ = mesure de comptage.
Alors $\mathcal{L}^1_K(\mu) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K \text{ et } \sum_{n \geq 0} |u_n| < +\infty\}$ 123

Th. ⑲: $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ est un K-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu) \mapsto \int_X f \, d\mu$ est une forme linéaire positive, donc croissante.

Prop. ⑳: Si $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$, alors $\left| \int_K f \, d\mu \right| \leq \int_K |f| \, d\mu$ (inégalité triangulaire) 124

II. Théorèmes de convergence et applications

Le premier des trois principaux théorèmes de convergence est le TCM.

126 *Exercice (21)*: On pose pour $x>0$: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

Montrer que : $\forall x>0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$

1) Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée (TCD)

Th. (22): (*lemme de Fatou*)

132 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors : $\int_X \underline{\lim}_n f_n\,d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n\,d\mu$

Appli. (23): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f: X\to\mathbb{K}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ simplement et $\sup_n \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$. Alors, $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Th. (24): (*TCD*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ et $f: X\to\mathbb{K}$ telle que $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ μ p.p. en x

134 On suppose qu'il existe $g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ positive telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n|\leq g$ μ pp.

Alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

[20] 313 *Exercice (22)*: reprendre l'exercice (21) après avoir remarqué que pour tout $u\in[0,1]$, $0\leq 1-u\leq e^{-u}$

Rq (23): L'hypothèse de domination est primordiale. Si on prend $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{cvs} 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_n\,dx = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx$

2) Applications

137 **Th. (24)**: Soit $(f_n)_n$ suite de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ telle que $\sum_n \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$

Alors $f = \sum_{n\geq 0} f_n$ converge μ pp., $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ et $\int_X f\,d\mu = \sum_{n\geq 0}\int_X f_n\,d\mu$

Rq (25): En se plaçant sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on retrouve le théorème des familles sommables (requiert le théorème de Fubini...).

Th. (26): (*holomorphie sous l'intégrale*) [Tau]

Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert et $f:\Omega\times X\to\mathbb{C}$. Si : 91

i) $\forall z\in\Omega$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable

ii) $\forall x\in X$, $z\mapsto f(z,x)\in\mathcal{H}(\Omega)$ de dérivée $\partial_z f$.

iii) $\forall K\subset\Omega$ compact, $\exists g_K\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{A})$ telle que : $\forall (z,x)\in K\times X,\ |f(z,x)|\leq g_K(x)$.

Alors : $F: z\in\Omega\mapsto\int_X f(z,x)\,d\mu(x)\in\mathcal{H}(\Omega)$, et $F'(z) = \int_X \partial_z f(z,x)\,d\mu(x)$.

Exercice (27): montrer que $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \in\mathcal{H}(\{\mathrm{Re}\, z>0\})$ [20] 312

Rq (28): Les théorèmes de continuité / dérivabilité des intégrales à paramètres, non écrits, sont tout aussi fondamentaux.

III. Espaces L^p et convolution [Ru]

1) $L^p(\mu)$, $1\leq p\leq+\infty$

Déf. (29): Pour $1\leq p$, on pose $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}),\ \|f\|_p<+\infty\}/{\text{“}=\mu\text{pp”}}$ 80-82

où $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$. 82

On pose également $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}),\ \|f\|_\infty<+\infty\}/{\text{“}=\mu\text{pp”}}$

où $\|f\|_\infty = \inf\{c>0 \,/\, \mu(\{x\in X / f(x)>c\}) = 0\}$.

Déf. (30): Deux réels $p,q\geq 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sont dits conjugués.

Prop. (31): Soient $p,q\geq 1$ conjugués, $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g\in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Alors $fg\in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$ (*Hölder*)

Coro. (32): Soient $f,g\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1\leq p\leq+\infty$. Alors $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$.

$L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est donc un $\mathbb{K}$-ev normé (*Minkowski*)

Th. (33): (*Riesz-Fischer*) AVP

Pour tout $1\leq p\leq+\infty$, $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach 82

Rq. (34): D'après la démonstration du théorème de Riesz-Fischer, on a : si $\|f_n-f\|_p\xrightarrow[n]{}0$ et $f_n\xrightarrow[n]{cvs} g$ pp, alors $f=g$ pp.

2) Densité, convolution dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$

Cadre : On prend $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ = tribu de Lebesgue et μ = mesure de Lebesgue. On notera $L^p = L^p_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$, et on supposera connues l'existence et les définitions d'approximation de l'unité ($\mathcal{C}^\infty$) et de suite régularisante ($\mathcal{C}^\infty_c$)

[Bri] **Th. 35** : 1) Si $1 \leq p \leq +\infty$, {fonctions étagées} $\cap L^p$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$.
165 2) Si $1 \leq p < +\infty$: {fonctions en escaliers intégrables}, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ sont
166 denses dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

Coro 36 : pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est séparable.

[Ru] **Déf. 37** : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables. On définit le produit de
208 convolution de f et g, lorsqu'il existe, par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t)\, dt$.

? **Th. 38** : (Young) Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.
Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$.
Alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

222 **Déf./Th 39** : Soit $f \in L^p$, $a \in \mathbb{R}$. On pose $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$.
Alors $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to L^p \\ a \mapsto \tau_a f \end{array}$ est bien définie et continue. $(1 \leq p < +\infty)$

Prop. 40 : Si $f \in L^1$, $g \in L^\infty$, alors $f * g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Prop. 41 : $(L^1, +, *)$ est une algèbre associative, commutative non unitaire.

[Fa] **Prop. 42** : Si $f \in L^p$, $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq +\infty)$
124 On a alors $(f * g)^{(i)} = f * g^{(i)}$ pour $0 \leq i \leq k$.

Th. 43 : Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.
~123 1) Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f * \varphi_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$
2) Si f est uniformément continue, alors $\|f * \varphi_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

121 **Th. 44** : Soit $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $\|f * \varphi_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Coro 45 : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$

124 **Th. 46** : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$

Appli. 47 : Si $f \in L^1$ et sa transformée de Fourier $\hat{f} \in L^1$, et soit [Ru]
$g : x \mapsto \hat{\hat{f}}(-x)$. Alors $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $f = g$ p.p. 223

IV. Espaces L^2

Prop. 48 : $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g}\, d\mu$ est un espace de Hilbert

1) $L^2(\mathbb{T})$

Déf. 49 : On pose $L^p(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mesurable, 2π-périodique, $\|f\|_p < +\infty \}$
Où $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}$.

Rq 50 : Les théorèmes 44 et 45 donnent des versions plus générales du théorème de Fejér. Il a en revanche des conséquences supplémentaires dans le cas de $L^2(\mathbb{T})$ de par sa nature de Hilbert [ZQ]

Prop. 51 : 1) $(x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. 86
2) $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f, et f est la limite dans $L^2(\mathbb{T})$ de sa série de Fourier (et pas seulement de la moyenne de Cesàro).

2) $L^2(I, \rho)$ [Beck]

Déf. 52 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction-poids,
i.e. telle que $\rho > 0$ et $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. 110-
On note : $L^2(I, \rho) = \{ f : I \to \mathbb{C}$, mesurable, $\int_I |f|^2 \rho\, dx < +\infty \} / _{\text{" = pp "}}$. 111

Prop. 53 : $L^2(I, \rho)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho\, dx$ est un espace de Hilbert.

Prop. 54 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux unitaires vérifiant $\deg(P_n) = n$ dans $L^2(I, \rho)$.

Th. 55 : (base hilbertienne de polynômes orthogonaux) DVP
Si il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x)\, dx < +\infty$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$. 140

Appli 56 : Résolution d'équations différentielles (oscillateur harmonique quantique)

Références :

- [Bri] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration
- [ZQ] Zuily, Queffélec, Analyse pour l'intégration (4e éd.)
- [Ru] Rudin, Analyse réelle et complexe (3e éd.)
- [Tau] Tauvel, Analyse complexe pour la L3
- [Fa] Faraut, Calcul intégral