

Cadrec: $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On notera $A^* = {}^t \bar{A}$, $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , et on écrira $\forall p$ pour valeur propre et $\vec{v}_p$ pour vecteur propre.

$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$ est la matrice de Laplaceu 1D.

I. Normes matricielles et rayon spectral

1) Valeurs propres et valeurs singulières.

Def./Prop. (1): $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^*A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Les valeurs singulières de A sont les racines des éléments de $\text{Sp}(A^*A) \subset \mathbb{R}^+$. On les notera $\mu_1, \dots, \mu_n$.

IRq (2): Si A est normale, alors $\text{Sp}(A^*A) = \{ |\lambda|^2, \lambda \in \text{Sp}(A) \}$.

Th. (3): (Gershgorin - Hadamard)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $D_i = \{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$.

Alors: $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Coro (4): Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice à diagonale strictement dominante, i.e. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, A est inversible.

2) Normes matricielles

Def. (5): Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(K)$. $\|\cdot\|$ est dite matricielle si: $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Def. (6): Soit $\|\cdot\|$ une norme sur K^n . La norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(K)$ est: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Prop (7): Une norme subordonnée est une norme matricielle.

Def./Prop (8): $\|\cdot\|_F: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $A \mapsto \sqrt{\text{Tr}(A^*A)}$ est une norme matricielle non subordonnée appelée norme de Frobenius.

Ex (9): $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

3) Rayon spectral

Def. (10): Le rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\rho(A) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A) \}$

Ex. (11): $\rho(L) = 4 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(n+1)} \right)$

Prop. (12): $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

IRq (13): 1) $\|A\|_2$ est donc la plus grande valeur singulière de A

2) Si A est normale, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Th. (14): 1) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

2) Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$ telle que $\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$.

Th. (15): 1) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\|B\| \leq 1$. Alors $I+B \in \text{GL}_n(K)$ et $\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$.

2) Si $I+B$ est singulière, alors pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$, on a $\|B\| \geq 1$.

Th. (16): Soit $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit équivalentes

1) $B^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$ 2) $\forall v \in K^n$, $B^h v \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$ 3) $\rho(B) < 1$

4) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée.

II. Problématique. Conditionnement

1) Problèmes étudiés

On s'intéresse à la résolution approchée de deux problèmes

1) résolution de $Au = b$, où $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de grande taille et $b \in \mathbb{R}^n$

2) déterminer les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_n(K)$, i.e. $\text{Sp}(A)$ et des $\vec{v}_p$ associés, ou tout du moins une partie des éléments propres.

[NH242]

25

Rq (17): Le problème 1) est justifié par le fait que, pour un exemple $n = 10^6$, un ordinateur récent mettrait plusieurs années à résoudre directement $Au = b$.

[60]

26

Le problème 2) est justifié par l'impossibilité de déterminer par radicaux les racines de χ_A , polynôme caractéristique de A si $n \geq 5$.

2) Conditionnement d'un système linéaire

[60]

Cadre: $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On s'intéresse à la variation de la solution de $Au = b$ lorsque l'on perturbe A ou b .

$\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée.

30

Th. (18): Soit δb une perturbation de b et $u + \delta u$ la solution de $A(u + \delta u) = b + \delta b$. Alors: $\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

De plus, cette inégalité est la meilleure possible.

30

Th. (19): Soit ΔA une perturbation de A et $u + \Delta u$ la solution de $(A + \Delta A)(u + \Delta u) = b$. Alors: $\frac{\|\Delta u\|}{\|u + \Delta u\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

De plus, cette inégalité est la meilleure possible.

29

Def. (20): $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ s'appelle le conditionnement de A relativement à la norme subordonnée $\|\cdot\|$.

Notation (21): On notera $\mu_{\max}(A)$ (resp. $\mu_{\min}(A)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur singulière de $A \neq 0$ et $\lambda_{\max} \in \text{Sp}(A)$ (resp. $\lambda_{\min} \in \text{Sp}(A)$) telle que $|\lambda_{\max}| \geq |\lambda|$ (resp. $|\lambda_{\min}| \leq |\lambda|$) pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $\lambda \in \mathbb{K}$

Th. (22): 1) $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$: $\text{cond}(A) \geq 1$; $\text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$; $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$

2) $\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_{\max}(A)}{\mu_{\min}(A)}$

3) si A est normale, $\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$

32

4) Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ou $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $\text{cond}_2(A) = 1$

5) $\text{cond}_2(A)$ est invariant par transformation unitaire, i.e.

$$U^*U = I \Rightarrow \text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(U^{-1}AU) = \text{cond}_2(A)$$

Ex (23): $\text{cond}_2(I) = \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2(n+1)})}{\sin^2(\frac{\pi}{2(n+1)})}$. On a $\text{cond}_2(I) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

✓

Rq (24): Si $\text{cond}(A) \gg 1$, on voudra chercher $C \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{cond}(CA) \ll \text{cond}(A)$, puis résoudre $CAu = Cb$.

1) Si A est normale, CA n'a aucune raison d'être normale...

3) Conditionnement d'un problème de valeurs propres

(facultatif si pas le temps)

Cadre: $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée.

Th. (25): Si A est diagonalisable et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_i(A))$ et $\|\cdot\|$ est telle que $\|\text{diag}(\lambda_i)\| = \max |\lambda_i|$, alors pour tout $\delta A \in GL_n(\mathbb{K})$,

34

$$\text{Sp}(A + \delta A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i \text{ où } D_i = \{z \in \mathbb{C} / |z - \lambda_i(A)| \leq \text{cond}(P) \|\delta A\|\}$$

Coro / Def (26): Le conditionnement de A pour $\|\cdot\|$ relativement au calcul de ses VP est $\Gamma(A) = \inf \{ \text{cond}(P), P \in GL_n(\mathbb{K}) / P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_i(A)) \}$.

35

Rq (27): Les matrices normales (sur $\mathbb{C}$), les matrices auto-adjointes (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont très bien conditionnées pour $\|\cdot\|_2$, car on a alors $\Gamma_2(A) = 1$.

35

III Méthodes itératives pour la recherche d'éléments propres

Cadre: $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ de VP de A . On suppose $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$

[ACP]

Def. (28): (algorithme de la puissance)

Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| = 1$. On définit l'algorithme suivant:

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, y_k = Ax_{k-1} \quad (\dots = A^k x_0)$$

$$x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

1) si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on s'arrête.

441

Prop. (29): On suppose que $\lambda_n > 0$, que λ_n est simple et que x_0 n'est pas orthogonal à e_n . Alors la méthode de la puissance converge, c'est-à-dire que: $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_n$ et $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_\infty$ où $x_\infty = \pm e_n$.

De plus, $|\|y_k\| - \lambda_n| \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^{2k}$ et $\|x_k - x_\infty\| \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^k$

Rq (30): En supposant $\lambda_1 > 0$ et simple, la méthode de la puissance inverse consistant à poser $Ay_k = x_{k+1}$ dans 1) de Def. (28) nous donne un résultat de convergence similaire.

IV. Méthodes de résolution approchée de systèmes linéaires

Cadenc: $A \in GL_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1) Principe des méthodes itératives matricielles

Idée (31): On suppose que: $\exists B \in GL_n(\mathbb{R}) / Au = b \Leftrightarrow u = Bu + c$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u_{k+1} = Bu_k + c \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ tel que $Au = b$

Th. (32): Sont équivalentes: 1) la méthode itérative précédente converge

2) $\rho(B) < 1$ 3) $\|B\| < 1$ pour une norme matricielle $\|\cdot\|$

Rq (33): $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto Bu + c$ est strictement contractante.

Méthode (34): On va écrire $A = \Pi - N$ où $\Pi \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in GL_n(\mathbb{R})$

Alors: $Au = b \Leftrightarrow u = \frac{\Pi^{-1}N}{B}u + \frac{\Pi^{-1}b}{c}$

2) Méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation

Cadenc: $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R}) / a_{ii} \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

On écrit $A = D - E - F$ où D, E et F sont définies en ANNEXE

Def. (35): 1) Jacobi: $\Pi = D, N = E + F$ et $B = J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$

2) Gauss-Seidel: $\Pi = D - E, N = F$ et $B = G = (D - E)^{-1}F$

3) relaxation: $\omega \neq 0, A = (\frac{1}{\omega}D - E) - [(\frac{1}{\omega} - 1)D + F] = \Pi - N$.

$B = G_\omega = \Pi^{-1}N$.

Prop. (36): Si la méthode de relaxation converge, alors $0 < \omega < 2$

Th. (37): Si A est à diagonale strictement dominante, alors

1) la méthode de Jacobi converge

2) si $0 < \omega \leq 1$, la méthode de relaxation converge

Lemme (38): Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\Pi^* + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $\Pi^* + N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\rho(\Pi^{-1}N) < 1$.

Th. (39): Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors:

1) si $D + E + F \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de Jacobi converge

2) si $0 < \omega < 2$, la méthode de relaxation converge.

Ex (40): La méthode de Jacobi converge pour L .

3) Optimisation: la méthode du gradient optimal

Cadenc: $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On notera $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ et $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$

On pose $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

On note $\bar{x}$ l'unique solution de $Ax = b$. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Prop. (41): ϕ admet comme unique point de minimum $\bar{x}$.

Lemme (42): (Kantorovich)

Soient $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ les vp de A et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Alors: $\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \times \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$

Th. (43): Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_k = \frac{\|\nabla \phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - x_k \nabla \phi(x_k) \end{cases}$$

Alors, $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$

[Cea]

98

99

ANNEXE

$$A = \begin{pmatrix} 0_{s,s} & -F \\ -F^* & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$F_{ij} = -a_{ij} \text{ si } i < j, 0 \text{ sinon}$$

$$F_{ij}^* = -a_{ji} \text{ si } i > j, 0 \text{ sinon}$$

$$D_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, j$$

References:

- [Cea] Cealet, Introduction ...
- [Al] Allaire, AN et optimisation ...
- [S] Sene (Denis), Matrices: Theory and applications
- [Ber] Bernis, Analyse: 40 développements
- [NH242] Caldao, Nouvelle ... Tome 1