I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

I. Fonctions monotones

1) Définitions, premières propriétés

[Ram] **Déf. (1)** : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite croissante sur I (resp. strictement croissante)
118 si : $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).

f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si $-f$ est croissante (resp. strictement croissante).

f est dite monotone (resp. strictement) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement).

Ex (2) : • $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$)

Prop (3) : Une fonction monotone est Lebesgue-mesurable

Prop (4) : $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est injective SSI elle est strictement monotone. Sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est alors monotone de même monotonie que f.

Prop (5) : • la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante)
• le produit d'une fonction monotone par un réel positif est monotone
119 de même monotonie
• le produit de deux fonctions croissantes positives est croissant
• la composée de deux fonctions monotones est croissante si elles sont de même monotonie, décroissante sinon

Rq (5 bis) : L'ensemble des fonctions monotones sur I n'est pas un ev.

Appli (6) : Soit $f : I \to I$, $u_0 \in I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
i) Si f est croissante, alors $(u_n)_n$ est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$.
ii) Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante et les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens contraires.

2) Limites, continuité

Th. (7) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $I \cap]a, +\infty[$ (resp. $I \cap]-\infty, a[$), alors f admet une limite finie ou infinie à droite (resp. à gauche) de a. 119

Coro (8) : avec les mêmes notations, si $a \in I$ et $a \neq \operatorname{Sup} I$ (resp. $a \neq \operatorname{Inf}(I)$) 120
alors f admet une limite finie à droite (resp. à gauche) de a.

Th. (9) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. L'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Th. (10) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f est continue SSI $f(I)$ est un intervalle. 121

Coro (11) : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors $f(I)$ est un intervalle et f est un homéomorphisme.
Si $f : I \to J$ ($J \subset \mathbb{R}$ un intervalle) est un homéomorphisme, alors f est strictement monotone

Ex (12) : $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de bijection réciproque arctan.

Prop. (13) : Une limite simple d'une suite de fonctions monotones est monotone, de même sens.

3) Monotonie et dérivabilité

Th. (14) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Alors 122
i) f est constante SSI $f'_d = 0$
ii) f est croissante SSI $f'_d \geq 0$
iii) f est décroissante SSI $f'_d \leq 0$.
iv) f est strictement croissante SSI $f'_d \geq 0$ et $\{x \in \mathring{I} \ / \ f'_d(x) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Rq (15) : f strictement croissante $\not\Rightarrow$ $f' > 0$ ($f(x) = x^3$...)

4) Comparaison série-intégrale

[Gou] **Th. 16** : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par
211 morceaux et décroissante. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$. En particulier $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Ex. 17 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

II. Fonctions convexes (on rappelle $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe)

1) Définitions, premières propriétés et caractérisation

[Pom] Ch. 12 **Déf. 18** : $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :
$\forall (x,y) \in C^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.
Elle est dite strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte
133 pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$. Elle est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Déf. 19 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Son épigraphe est
$Epi(f) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times C \ / \ t \geq f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Th. 20 : $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe <u>SSI</u> $Epi(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Rq 21 : Les déf. 18, 19 et th. 20 sont valables si $C = I$ ...

Ex. 22 :
- $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$

Prop. 23 : La somme de deux fonctions convexes est convexe, le produit d'une fonction convexe par un réel positif est convexe.

Rq 24 : $\{f : C \to \mathbb{R}, f \text{ convexe}\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Prop. 25 : $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe <u>SSI</u> $\forall k \geq 2$, $\forall x_1 \dots x_k \in C$,
134 $\forall t_1 \dots t_k \in [0,1] \ / \ t_1 + \dots + t_k = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i)$.

2) Régularité et convexité en dimension 1

Th. 26 : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe <u>SSI</u> $\forall x_0 \in I$, $g_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ [Pom] 137
est croissante.

Coro 27 : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe <u>SSI</u> $\forall a, b, c \in I$, $a < b < c$, [Gou] 96
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$
(VOIR FIGURE)

Prop 28 : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et à droite. De plus, f'_d et f'_g sont croissantes sur $\mathring{I}$ et pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

Coro 29 : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe est continue sur $\mathring{I}$.

C-ex 30 : $\mathbb{1}_{\{0,1\}}$ est convexe sur $[0,1]$ mais discontinue en 0 et 1.

Th. 31 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors
f est convexe <u>SSI</u> f' est croissante.

Coro 32 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur I. Alors
f est convexe <u>SSI</u> $f'' \geq 0$

Ex 33 :
- $x \mapsto e^x$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Régularité et convexité en dimension $n \geq 2$ [Gia]

Cadre : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $C \subset \Omega$ convexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Th 34 : Si f est différentiable sur Ω, sont équivalentes.
i) f est convexe sur C
ii) $\forall x, y \in C$, $f(y) \geq f(x) + df(x)(y-x)$ "f est au-dessus de sa tangente" 154
iii) $\forall x, y \in C$, $(df(y) - df(x))(y-x) \geq 0$ "croissance des différentielles"

Th. 35 : Si f est deux fois différentiable sur Ω, alors 155
f est convexe sur C <u>SSI</u> $\forall x, y \in C$, $D^2 f(x)(y-x, y-x) \geq 0$

Ex 36 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$

III. Applications de la convexité

1) Applications de l'inégalité de convexité

[Rom] **Prop. 37 :** *(inégalité arithmético-géométrique)*

135 Pour tous $x_1 \dots x_n \geq 0$, $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$
et l'inégalité est stricte sauf si tous les x_i sont égaux

Appli. 38 : Déterminer le maximum du produit P des distances d'un point M intérieur à un tétraèdre régulier T aux côtés de T.

Prop. 39 : *(inégalité de Hölder dans les espaces L^p)*
Soit $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$.
Alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Coro. 40 : $p \geq 1$, $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

DVP 1 **Th. 41 :** *(ellipsoïde de John-Loewner)*
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Il existe alors un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

2) Optimisation
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe

[Cia] **Th. 42 :** Soit $C \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $x \in C$ et

153 admet en x un minimum local, alors $df(x)(y - x) \geq 0$ $\forall y \in C$.

Th. 43 :

156 i) Si $f : C \to \mathbb{R}$ convexe admet un minimum local en $x \in C$, alors elle admet un minimum global sur C en x.
ii) $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict
iii) Soit $C \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en $x \in C$. Alors f admet un minimum global ~~dans~~ C en x SSI $df(x)(y-x) \geq 0$ $\forall y \in C$.
(inégalité d'Euler)
iv) Si C est ouvert, la condition précédente équivaut à $df(x) = 0$
(égalité d'Euler)

Appli. 44 : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ admet un unique minimum local en $x_0 = A^{-1}b$.

3) Méthode du gradient optimal

Cadre 45 : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, x\rangle$ et $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$. [Ber]
On note $\bar{x}$ l'unique solution de $Ax = b$. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. 154
Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ +
$x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$

Prop. 46 : Φ admet comme unique point de minimum $\bar{x}$

Lemme 47 : *(Kantorovich)*
Soient $0 < \lambda_{min} = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$ les vp de A et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
Alors : $$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \times \frac{\lambda_{max} \times \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$$

Th 48 : *(algorithme du gradient optimal)* DVP 2
Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k) \end{cases}$$
Alors, $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x}$

Références :

- [Ram] Ramis, Cours de MP Tome 3
- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [Pom] Pommellet, Cours d'analyse
- [Lia] Lesfari, Introduction à ...
- [Be] Bernis, Analyse : 40 développements