228 - Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cadre : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

I. Continuité et dérivabilité

1) Fonctions continues

(Gou) ~ 11 **Déf. ①** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall y \in I, |x_0 - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On notera $\mathcal{C}^0(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ continue sur } I \}$.

Ex. ② : 1) $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
2) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part.

Rq ③ : La continuité de $f : I \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ s'écrit également :
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Prop. ④ : $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si pour toute suite (x_n)
20 de I telle que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$, on a $f(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} f(x_0)$.

Déf. ⑤ : $f : I \to \mathbb{R}$ est continue à gauche (resp. à droite) en $x_0 \in I$
16 si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$). Si ces deux limites existent mais sont différentes, on dit que f présente un point de discontinuité de première espèce en x_0. Elles sont égales SSI f est continue en x_0

16 **Prop. ⑥** : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe, alors il existe un prolongement continu de f sur $[a, b[$.

Ex. ⑦ : $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité par 0 en 0.

12 **Déf. ⑧** : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Prop. ⑨ : f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue

Rq ⑩ : Réciproque fausse : $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

Prop ⑪ : $\mathcal{C}^0(I)$ est une algèbre commutative

Ex. ⑫ : Une fonction lipschitzienne est uniformément continue (U.C.)

2) Fonction dérivable [Gou]

Déf. ⑫ : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 71
si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. La limite est alors notée $f'(x)$ et $f : x \mapsto f'(x)$ (lorsque cela est bien défini) est appelée dérivée de f. f dérivable sur I si f dérivable en tout $x \in I$

Ex. ⑬ : $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$.

Déf. ⑭ : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0 \in I$ 71
si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$ (resp. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) existe.

Ex ⑮ : $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ 72

Prop. ⑯ : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$ $\Rightarrow$ f continue en x_0

Rq ⑰ : $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 ssi $f(x_0 + h) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$

Prop. ⑱ : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$. Si $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell$ existe, alors f se prolonge en une fonction "dérivable sur $[a, b[$" (en fait à droite en a) et $f'(a) = \ell$.

Rq ⑲ : Prop. ⑱ est une condition suffisante mais non nécessaire.
$f : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ est dérivable en 0 mais f' n'admet pas de limite en 0.

Déf ⑳ : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I si $f, f', f'' = (f')', \dots$ 72
$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ existe et sont continues sur I.

Prop. ㉑ : L'ensemble des fonctions $A = \{ f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ dérivable en } x_0 \in I \}$ est une 72
algèbre. Si $f, g \in A$ et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g} \in A$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Prop. ㉒ : (formule de Leibniz)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ telles que $f^{(n)}(x_0)$ et $g^{(n)}(x_0)$ existent. 72
Alors : $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$

♡

Application (23) : (construction d'une suite régularisante) (voir ANNEXE)
Soit $\varphi : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } -1<x<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors $(\varphi_n) / \varphi_n(x) = n \frac{\varphi(nx)}{\|\varphi\|_1}$ est une suite régularisante.

II. Théorèmes fondamentaux

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Th (24) : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle

Coro. (25) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Alors f s'annule sur $]a,b[$.

2) Utilisation de la compacité

Th. (26) : L'image continue d'un compact est un compact

Coro (27) : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Th. (28) : (Heine)
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue.

Appli. (29) : (sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$

[Gou] 73 Th. (30) : (Rolle)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Appli. (31) : (Théorème des accroissements finis (TAF))
74 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

Coro (32) : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ est croissante SSI $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Elle est constante SSI $f' = 0$.

Rq (33) : On verra une autre application du TAF au Th. (35)

3) Suites et séries de fonctions

[Gou] 233 Th. (34) : Soient $(f_n), f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que les f_n sont continues en $x_0 \in I$ et que (f_n) converge uniformément (CVU) vers f sur un voisinage de x_0. Alors, f est continue en x_0

C. ex (35) : $f_n : x \in [0,1] \to x^n$. Alors $f_n \xrightarrow[n]{CVS} 0$ mais $f_n \xrightarrow[n]{CVU}\!\!\!\!\!\!/\;\; 0$.

234 Th. (35) : Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si
1) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge
2) $(f_n'(x_0))_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. De plus, $f' = g$.

Appli. (36) : voir Théorème de Weierstrass (Appli (45))

III. Fonctions définies par une intégrale

1) Définition. Théorèmes de continuité et de dérivabilité [BP]

Cadre (37) : On considère $f : \begin{array}{l} I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto f(t,x) \end{array}$ une application

Th. (38) : (continuité)
130 On suppose que :
1) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2) p.p. en x, $t \mapsto f(t,x)$ est continue
3) il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que
$\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ pp en x. (domination)
Alors $F : t \in I \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx$ est bien définie et continue ~~dans~~ I.

Th. (39) : (dérivabilité)
On suppose que :
1) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2) $\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A^c) = 0$ tel que : ~ 141
i) $\exists t_0 \in I / x \mapsto f(t_0, x)$ est intégrable
ii) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$
iii) $\forall K \subset I$ compact, il existe $g_K : K \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que
$\forall (t,x) \in K \times A$, $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g_K(t)$ (domination)
Alors $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dt$ est bien définie et dérivable sur I de dérivée $F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$

228
(2)

DVP1 **Appli. (40)** : On pose pour $x>0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
Mq $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ $\forall x>0$ (formule d'Euler-Gauss)

2) Convolution

Notations (41) : On écrira $L^p = L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \le p \le +\infty$. On supposera connue la notion de produit de convolution.

Th. (42) : (inégalité de Young)
Soient $1 \le p,q,r \le +\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$, $f\in L^p$ et $g\in L^q$. Alors $f*g \in L^r$ et $\|f*g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Prop. (43) : Soit $1\le p<+\infty$, $f\in L^p$ et $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ $k\in\mathbb{N}$. Alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et pour tout $0\le j\le k$, $(f*g)^{(j)} = f*g^{(j)}$.

Th. (44) : Soit (K_n) une approximation de l'unité.
1) Si $f\in L^\infty$ et f est uniformément continue, alors $\|f-f*K_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2) Si $f\in L^p$, $1\le p<+\infty$, alors $\|f-f*K_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

DVP2 [Gou] 304 **Appli. (45)** : (théorème de Weierstrass)
Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$. Alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes

Coro (46) : Si $1\le p<+\infty$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$

IV. Dérivation faible

1) Distribution : définition et exemples

[Bony] **Déf. (46)** : Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Le support de φ est $\operatorname{Supp}\varphi = \overline{\{x\in\mathbb{R} / f(x)\neq 0\}}$
On note $\mathcal{D}(I) = \{\varphi\in\mathcal{C}^\infty(I),\ \operatorname{Supp}\varphi \text{ est compact}\}$.

Déf. (47) : Soit $(\varphi_n)_n$ suite de $\mathcal{D}(I)$ et $\varphi\in\mathcal{D}(I)$. On dit que (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}(I)$ si : 1) $\exists [a,b]\subset I$ / $\forall n\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Supp}\varphi_n \subset [a,b]$
2) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Déf. (48) : Soit $T\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(I),\mathbb{R})$. On dit que T est une distribution sur I si
$\forall$ compact $K\subset I$, $\exists m\in\mathbb{N}$, $\exists C>0$ / $\forall\varphi\in\mathcal{D}(I)$, $\operatorname{Supp}\varphi\subset K \Rightarrow |T(\varphi)| \le C\sum_{\alpha=0}^m \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty$
On écrira $T(\varphi)$ ou $\langle T,\varphi\rangle$.

Prop. (49) : $T\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(I),\mathbb{R})$ est une distribution sur I ssi pour toute suite (φ_n) de $\mathcal{D}(I)$, $\varphi\in\mathcal{D}(I)$ tels que (φ_n) cv vers φ sur $\mathcal{D}(I)$, $T(\varphi_n) \xrightarrow[n]{} \varphi(\varphi)$

Ex. (50) : 1) Si $f\in L^1_{loc}(I)$, $T_f : \varphi\in\mathcal{D}(I) \mapsto \int_I f\varphi\, dx$ est une distribution
2) $x_0\in I$. $\delta_{x_0} : \varphi \mapsto \varphi(x_0)$ est une distribution
3) $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est une distribution notée $vp\left(\frac{1}{x}\right)$

2) Dérivée faible : définition et exemples

Déf./Prop. (51) : Soit T une distribution sur I. Alors $T' : \varphi \mapsto -\langle T, \varphi'\rangle$ est une distribution appelée dérivée au sens des distributions de T.

Ex. (52) : 1) Si $f\in\mathcal{C}^1(I)$, alors $T_f' = -T_{f'}$
2) soit $H = 1_{\mathbb{R}^+}$. Alors $T_H' = \delta_0$

Prop. (53) : Si $f\in L^1_{loc}(I)$, $a\in I$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors $T_F' = T_f$

Ex. (54) : $f : x\mapsto \log(|x|)$. $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors $T_f' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$

Références :

- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd)
- [BP] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration
- [Bony] Bony, Cours d'analyse...