Cadre : (X,d) est un espace métrique. $n \in \mathbb{N}^*$. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites récurrentes

1) Définition. Suites réelles en dimension 1

[Gou] 200 **Déf. ①** : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre k si on peut écrire : $u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, où f est une application de E^k dans E.

Rq ② : On peut alors se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \in E^k$, $F : E^k \to E^k$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ f(x_0, \dots, x_{k-1}) \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = F(X_n)$ ♡

Prop. ③ : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to I$, $u_0 \in I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ $n \in \mathbb{N}$.

200 1) si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$

201 2) si f est décroissante, alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens opposés

Ex. ④ : $f : [0,4[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

202 1) Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors $(u_n)_n$ est constante

203 2) Si $u_0 \in [0,1[$, alors $(u_n)_n$ croît vers 1

3) si $u_0 \in]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$, alors $(u_n)_n$ décroît vers 1

4) si $u_0 > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors $(u_n)_n$ n'est pas définie (à partir d'un certain rang)

2) Suites récurrentes linéaires

[Gou] **Déf. ⑤** : Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{C}$ est dite récurrente linéaire d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants s'il existe $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ tels que

202 $u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + a_0 u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Le polynôme caractéristique de la récurrence est alors $X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \dots - a_0 \in \mathbb{C}[X]$

Prop. ⑥ : Soit $P = \prod_{i=1}^{q} (X - x_i)^{\alpha_i}$. Alors l'ensemble des suites $(u_n)_n$ récurrentes linéaires de polynôme caractéristique P est l'ensemble de suites de la forme $u_n = P_1(n) x_1^n + \dots + P_q(n) x_q^n$ où $\forall 1 \le i \le q$, $P_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P_i < \alpha_i$

Rq ⑦ : Soit $(u_n)_n$ définie par : $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+2} = a u_n + b u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $a, b \in \mathbb{C}$. $P = X^2 - aX - b$.

1) si $P = (X - x_1)(X - x_2)$, $x_1 \neq x_2$, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$

2) si $P = (X - x)^2$, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) x^n$.

Ex. ⑧ : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. ♡

Alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$ (formule de Binet)

3) Exemples classiques

[Gou] **Déf. ⑨** : Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans un ev E est dite arithmétique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$. 201

On a alors : $u_n = u_0 + na$ $n \in \mathbb{N}$.

Déf. ⑩ : Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite géométrique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q u_n$ où $q \in K$. On a alors $u_n = q^n u_0$. Si $|q| > 1$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_n$ diverge, si $|q| < 1$, $(u_n)_n$ converge vers 0 et si $q = 1$, $(u_n)_n$ est constante.

Déf. ⑪ : Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite arithmético-géométrique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q u_n + a$, $q, a \in K$ $q \neq 1$.

En posant $r = \frac{a}{1-q}$, $(u_n - r)_n$ est alors géométrique de raison q.

II. Théorème du point fixe de Picard-Banach

1) Le théorème

[Dem] **Th. ⑫** : (Picard-Banach)

On suppose (X,d) complet. Soit $f : X \to X$ une application strictement contractante, i.e. : $\exists k < 1$ / $\forall x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$. 93

Alors, f admet un unique point fixe $a \in$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers a.

Enfin, on a : $d(x_n, a) \le k^n d(x_0, a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. 94

Rq ⑬ : Si f est strictement contractante, alors f est uniformément continue sur X. ♡

Prop. (14) : Le Th. (12) reste vrai si on suppose f continue et
94 admettant une itérée strictement contractante, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit strictement contractante.

2) Première application : le théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre (15) : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On pose $(*)$: $x' = f(t,x)$.

Th. (16) : (Cauchy-Lipschitz local) (C.L.)
♥ Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$, $\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times B_f(x_0, r)$ un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0).
Si $f_{|\mathcal{C}}$ est k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable alors pour tout intervalle ouvert $I \subset \,]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[$ tel que $t_0 \in I$, il existe une unique solution $x : I \to U$ de $(*)$ telle que $x(t_0) = x_0$

Rq. (17) : La démonstration repose sur :
1) si $x \in \mathcal{C}^0(I,U)$: $x \in \mathcal{C}^1(I,U)$ est solution de $(*)$ de c.i. (t_0, x_0) $\iff \forall t \in I, \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$
2) $E = (\mathcal{C}^0(I, B_f(x_0, r)), d_\infty)$ est complet

3) Classification des points fixes si $X = \mathbb{R}$
[Dem]

Cadre (18) : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle fermé et $f : I \to I$ une fonction de
95 classe $\mathcal{C}^1$. Soit a un point fixe de f (existe car $f \in \mathcal{C}^0(I,I)$).

Prop. (19) : 1) Si $|f'(a)| < 1$, alors : $\exists h > 0 \, / \, \forall x_0 \in [a-h, a+h]$, $f^p(x_0) \xrightarrow[p \to +\infty]{} a$
a est alors appelé un point fixe attractif
2) Si $|f'(a)| > 1$, alors : $\exists h > 0 \, / \, \forall x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}$, $|f(x) - a| > |x - a|$.
96 a est alors appelé un point fixe répulsif

Rq (20) : 1) Si a est un point fixe répulsif, alors a est un point fixe attractif pour f^{-1} (définie localement au voisinage de a).
2) si $f'(a) = 1$, on ne peut a priori pas conclure

Ex. (21) : 1) $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin x$ et $a = 0$. Si $x_0 \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$, $(f^n(x_0))_n$ est
97 strictement décroissante et converge vers 0
2) $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \operatorname{sh} x$ et $a = 0$. Si $x_0 > 0$, $(f^n(x_0))_n$ est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.

Appli. (22) : (Méthode de Newton) [Rou]
Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$. Montrer que : 152
1) $\exists ! \, a \in \,]c,d[\, / \, f(a) = 0$. On pose alors $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
2) $\exists \alpha > 0 \, / \, \forall x_0 \in I = [a - \alpha, a + \alpha]$, $F^n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Ordre de la convergence ? DVP
3) si $f'' > 0$, m.q. $I = [a, d]$ convient, que $F^n(x_0) \searrow a$ et que $\frac{F^{n+1}(x_0) - a}{(F^n(x_0) - a)^2} \xrightarrow[n]{} \mu > 0$

III. Rayon spectral. Méthode itérative de recherche d'éléments propres

Cadre (23) : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $Sp(A)$ est le spectre de A, on écrira vp (resp. $\vec{vp}$) pour valeur (resp. vecteur) propre et $A^* = {}^t\bar{A}$.
On notera $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice du laplacien 1D. ♥

1) Rayon spectral. Théorème fondamental
[Cia] 8

Déf. (24) : Le rayon spectral de A est $\rho(A) = \operatorname{Max}\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$ ♥

Ex. (25) : $\rho(L) = 4 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)$. 2-1

Th. (26) : $B^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \iff \rho(B) < 1$

2) Méthode de la puissance
[Al]

Cadre (27) : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.
$(e_1 \dots e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ de $\vec{vp}$ de A (associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

Déf. (28) : (algorithme de la puissance)
On considère l'algorithme suivant, où $\varepsilon > 0$:
1) $x_0 \in \mathbb{R}^n \, / \, \|x_0\| = 1$
2) $\forall k \geq 1$:
- $y_k = A x_{k-1}$ $(= \dots = A^k x_0)$
- $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
- si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on s'arrête.

226 ②

<u>Prop. ㉙</u> : Si $\lambda_n > 0$, λ_n est simple et $x_0 \notin e_n^{\perp}$, alors la méthode de la puissance converge, i.e. : $\|y_k\|_2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_n$ et $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_\infty$ où $x_\infty = \pm e_n$

De plus, $$\big|\|y_k\|_2 - \lambda_n\big| = O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k}\right) \quad \text{et} \quad \|x_k - x_\infty\|_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{k}\right).$$

<u>Rq ㉚</u> : Si $\lambda_1 > 0$ et λ_1 est simple, l'algorithme de la puissance inverse qui consiste à poser $A y_k = x_{k-1}$ dans Déf. ㉘ 2) donne un résultat similaire.

<u>Ex ㉛</u> : si $A = L$: $\|y_k\| \longrightarrow 4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)$ pour l'algorithme de la puissance

$\|y_k\| \longrightarrow 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ ——— inverse.

IV. Résolution approchée de systèmes d'équations linéaires

[Cia] <u>Cadre ㉜</u> : $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On cherche l'unique $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = b$.

1) Principe des méthodes itératives matricielles

95 <u>Idée ㉝</u> : On suppose que : $\exists B \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, Au = b \iff u = Bu + c$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

96 et pour $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = Bu_k + c$. Alors, si $(u_k)_k$ converge, elle converge vers u.

<u>Th. ㉞</u> : $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge $\iff \rho(B) < 1$

<u>Rq ㉟</u> : $\rho(B) < 1 \iff f : \mathbb{R}^n, \|\cdot\| \longrightarrow \mathbb{R}^n, \|\cdot\|$, $x \longmapsto Bx + c$ est strictement contractante "pour une certaine norme $\|\cdot\|$"

97 <u>Méthode ㊱</u> : La méthode du splitting consiste à écrire $A = M - N$ où $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in M_n(\mathbb{R})$. On a alors : $Au = b \iff u = \underbrace{M^{-1}N}_{B}u + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$.

2) Méthodes de Jacobi et de relaxation

[Cia] <u>Notation ㊲</u> : On suppose que $A = (a_{ij})$ est telle que $a_{ii} \neq 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$. On

98 pose alors $A = D - E - F$ où D, E, F sont définies en ANNEXE

99 <u>Déf. ㊳</u> : 1) <u>Jacobi</u> : $M = D$, $N = E + F$ $\Rightarrow (B =) J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$

2) <u>relaxation</u> : $\omega \neq 0$. On écrit $A = \frac{1}{\omega}D - E - \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F\right] = M - N$

100 On pose alors $(B =)\ \mathcal{L}_\omega = M^{-1}N$.

<u>Prop. ㊴</u> : Si la méthode de relaxation converge, alors $0 < \omega < 2$ 104 [S]

<u>Th. ㊵</u> : Si A est à diagonale strictement dominante, alors 153

1) la méthode de Jacobi converge 154

2) si $\omega \in]0,1]$, la méthode de relaxation converge [Cia]

<u>Lemme ㊶</u> : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $M^* + N \in S_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M^* + N \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$ DVP 102

<u>Th. ㊷</u> : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors : ♡

1) si $D + E + F \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la méthode de Jacobi converge

2) si $\omega \in]0, 2[$, alors la méthode de relaxation converge. 103

<u>Ex. ㊸</u> : La méthode de Jacobi converge pour L. 104

3) Optimisation : méthode du gradient optimal [Ber]

<u>Cadre ㊹</u> : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, y\rangle$ et $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$. $\bar{x}$ est l'unique solution de $Ax = b$. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ 159 +

Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$

<u>Prop. ㊺</u> : Φ admet un unique point de minimum en $\bar{x}$.

<u>Lemme ㊻</u> : Soient $\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$ les vp de A et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Alors : $$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \, \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \times \frac{\lambda_{max} \cdot \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2} \quad \text{(Kantorovich)}$$

<u>Th. ㊼</u> : (algorithme du gradient optimal) DVP

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, \ 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k) \end{cases}$$

Alors, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{x}$

ANNEXE

Notation (37) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & -F \\ & D & \\ -E & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$D_{ij} = a_{ij}\,\delta_{ij}$

$E_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$, 0 sinon

$F_{ij} = -a_{ij}$ si $i < j$, 0 sinon

Références :

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [Cia] Ciarlet, *Introduction à ...*
- [Dem] Demailly, *Analyse numérique et équa. diff.*
- [Al] Allaire, *Analyse numérique matricielle*
- [Rou] Rouvière, *PGdCD* (4e éd.)
- [S] Serre, *Matrices: Theory and application*
- [Ber] Bernis, *Analyse : 40 développements*