223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les suites sont à valeurs dans K, et on notera $(u_n) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. Limite, valeurs d'adhérence. Suites de Cauchy

1) Limite d'une suite

[ElA] 12 Déf.(1) : On dit que (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in K$ telle que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On écrit $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$, et ℓ est appelée limite de la suite (u_n).

Th.(2) : Si (u_n) converge, alors sa limite est unique.

Déf.(3) : Si (u_n) ne converge pas, elle est dite divergente.

13 Ex(4) : 1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0

2) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente ($+\infty \notin \mathbb{R}$).

Prop.(5) : Une suite convergente est bornée

Rq(6) : La réciproque est fausse : $((-1)^n)_n$ par exemple

2) Valeurs d'adhérence

[ElA] 14 Déf.(7) : On appelle suite extraite d'une suite (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

15 Prop.(8) : Si $u_n \xrightarrow[n]{} \ell \in K$, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Déf.(9) : On dit que $\alpha \in K$ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers α.

Ex.(10) : 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de $((-1)^n)$

Prop(11) : Si $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$, alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence de (u_n)

Rq(12) : Une suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente, par exemple : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

[Gou] 19 Prop.(13) : L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$ (fermé)

3) Suites de Cauchy

Déf.(14) : On dit que (u_n) est de Cauchy si : [ElA] 34

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \geq n, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Prop.(15) : 1) Toute suite convergente est de Cauchy 34

2) Une suite de Cauchy est bornée

3) Si (u_n) est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence, alors (u_n) converge 35

Rq(16) : La notion de suite de Cauchy dépend fondamentalement de la distance mise sur K. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est par exemple de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la distance $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$

Appli(17) : $\sum \frac{1}{n}$ est divergente ♡

II. Cas des suites réelles

1) Premiers résultats [ElA]

Th(19) : (Théorème des gendarmes)

Soient $(a_n), (u_n), (b_n)$ trois suites réelles telles que $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. 19

Th.(20) : 1) Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge 32

2) Si (v_n) est décroissante et minorée, alors (v_n) converge.

Déf.(21) : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si : 33

1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

2) $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Th.(22) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers une même limite ℓ. On a de plus :

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq \ell \leq v_n$

Appli (23) : *(critère des séries alternées (CSA))*

Soit (a_n) une suite ≥ 0, décroissante et qui tend vers 0. ♡

Alors, $\sum (-1)^n a_n$ converge

Ex. (24) : A l'aide du CSA et du théorème d'Abel angulaire, on peut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ [Gou] 264

2) Théorème de Bolzano-Weierstrass (B.W.)

Th. (25) : *(B.W.)* [ELA] 36

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, (u_n) admet *(au moins)* une valeur d'adhérence.

Rq (26) : Réciproque fausse (voir Rq (17))

Coro. (27) : 1) Si (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors (u_n) converge ~35

2) Si (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, alors (u_n) converge

Déf. (28) : On dit que $(K, |\cdot|)$ est complet

Rq (29) : ⚠ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $]0,1]$ mais ne converge pas dans $]0,1]$.

III. Suites récurrentes réelles en dimension 1

Cadre (30) : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $f : I \to I$ une application continue. [ELA]

1) Définition, propriétés

Th. (31) : *(caractérisation séquentielle de la continuité)* 38

Soit $g : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in I$. Alors g est continue en ℓ SSI pour toute suite (u_n) de I telle que $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$, on a $g(u_n) \xrightarrow[n]{} g(\ell)$

Déf. (32) : Une suite récurrente est une suite définie par : $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : I \to I$ est continue.

Prop. (33) : Avec les notations précédentes, si $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$

Ex. (34) : (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ ne peut converger que vers -1 ou 3.

Prop. (35) : Soit (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors

1) si f est croissante sur I, (u_n) est monotone de sens de monotonie donné par le signe de $u_1 - u_0$

2) si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposés donnés respectivement par les signes de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$.

Ex (36) : Soit $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n]{} 0$ 39

2) Méthode de Newton

Exo (37) : Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$. Montrer que : [Rou] 152

1) $\exists!\, a \in\,]c,d[\; / f(a) = 0$. On pose alors $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

2) $\exists \alpha > 0 / \forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $F^n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Ordre de la convergence ? DVP 1

3) si $f'' > 0$, m.q. $I = [a,d]$ convient, que $F^n(x_0) \searrow_{n\to\infty} a$ et que il existe $\mu > 0$ tel que $\frac{F^{n+1}(x_0) - a}{(F^n(x_0) - a)^2} \to \mu$

IV. Applications

1) Comportement asymptotique

Th. (38) : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ [FGN1]

Appli (39) : Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$ *(série harmonique)*. 156

Alors il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Th. (40) : *(formule de Stirling)* [Gou]

On a l'équivalence : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ quand $n \to +\infty$ DVP 2 130 + 219

2) Moyenne de Cesaro

[ELA] **Déf. 41 :** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{K}$. On appelle suite des moyennes de Cesaro la suite de terme général $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

53 **Prop. 42 :** Si (u_n) est convergente, alors la suite des moyennes de Cesaro converge vers la même limite.

Rq. 43 : La réciproque est fausse ($u_n = (-1)^n$ par exemple)

Déf. 44 : Si la suite des moyennes de Cesaro d'une suite converge, on dit que la suite converge en moyenne de Cesaro.

Appli. 45 : (*Théorème de Fejer*)
♡ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Alors sa série de Fourier converge normalement en moyenne de Cesaro vers f.

3) Un résultat de densité

[Gou] **Prop. 46 :** Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a>0$ soit denses dans $\mathbb{R}$

205 **Coro. 47 :** Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Alors, $\{e^{2i\pi\theta k}, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

♡ **Appli. 48 :** Les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sont $\mathbb{U}$ ou de la forme $\mu_n \{z \in \mathbb{C} / |z|^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$

[Gou2] **Appli. 49 :** (*Théorème de Kronecker*)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, $\deg P = n \geq 1$ et irréductible sur $\mathbb{Q}$.
89 On note $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$ ses racines (comptées avec multiplicité).
Si $|\alpha_i| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$, alors $P = X$ ou il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P \mid X^k - 1$.

Coro. 50 : Soit $O \in O_n(\mathbb{Z})$. Alors son polynôme caractéristique est produit de polynômes cyclotomiques

Références :

- [ElA] El Amrani, *Suites et...*
- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [Gou2] Gourdon, *Algèbre* (2e éd.)
- [Rou] Rouvière, *PGdCD* (4e éd.)