

Cadrec: $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $n \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. On écrit EDO pour équation différentielle ordinaire.

I. Définitions. Existence de solutions et unicité

1) EDO, solutions et problème de Cauchy

Def. (1): Soit $f: J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Une solution de l'EDO du premier ordre $x' = f(t, x)$ (E) est un couple (γ, I) où :

- $I \subset J$ est un intervalle
- $x: I \rightarrow U$ est de classe C^1 .

Def. (2): Soit $(t_0, x_0) \in J \times U$. Le problème de Cauchy de conditions initiales (c.i.) (t_0, x_0) consiste à trouver une solution (x, I) de (E) telle que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$.

Def. (3): Une solution (x, I) du problème de Cauchy de c.i. (t_0, x_0) est dite maximale si pour toute solution (x_1, I_1) du même problème, on a $I_1 \subset I$ et $x_1 = x|_{I_1}$.

Def. (4): On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy de c.i. (t_0, x_0) si : si (x_1, I_1) et (x_2, I_2) sont deux solutions, alors $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Prop. (5): S'il y a unicité au problème de Cauchy, alors il existe une unique solution maximale.

Def. (6): Une solution (x, I) de (E) est dite globale si $I = J$.

Rq (7): Une solution globale au problème de Cauchy est maximale.

Rq (8): Si (E) est une EDO d'ordre $k \geq 1$: $x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$ où $f: J \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^n)^k$ et $F: J \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k$ on a : x est solution de (E) $\Leftrightarrow X$ est solution de $X' = F(t, X)$

2) Théorème de Cauchy-Lipschitz

Def. (9): Un cylindre centré en (t_0, x_0) est un produit de la forme $C = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_\delta(x_0, R) \subset J \times U$

Def. (10): $f: J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable si :

$\forall (t_0, x_0) \in J \times U, \exists C = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_\delta(x_0, R) \subset J \times U, \exists h > 0 /$
 $\forall (t, x) \in C, \forall (t, y) \in C, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq h \|x - y\|$

Def. (11): $C = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times B_\delta(x_0, R) \subset J \times U$ est un cylindre de sécurité si $\varepsilon_0 \wedge \delta \leq R$ où $\delta = \sup_C \|f(t, x)\|$

Lemme (12): Pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe un cylindre de sécurité en (t_0, x_0)

Prop. (13): Soit $C = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times B_\delta(x_0, R)$ un cylindre de sécurité.

Si $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (E) de c.i. (t_0, x_0) et $I \subset]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[$ alors x prend ses valeurs dans $B_\delta(x_0, R)$.

Th. (14): (Cauchy-Lipschitz local) (C.L.)

Soit $C = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times B_\delta(x_0, R)$ un cylindre de sécurité.

Si $f|_C$ est h -lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors pour tout intervalle ouvert $I \subset]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[$, il existe une unique solution $x: I \rightarrow U$ de $x' = f(t, x)$ de c.i. (t_0, x_0) . ($t_0 \in I \dots$)

Th. (15): (Cauchy-Lipschitz global)

Si f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$ il existe une unique solution maximale de $x' = f(t, x)$ de c.i. (t_0, x_0) .

Rq (16): Le théorème de Cauchy-Péano-Angela nous donne l'existence d'une solution au problème de Cauchy, mais on perd l'unicité.

Rq (17): L'interprétation géométrique du théorème de C.L. global est que l'ensemble des solutions de (E) forme une partition de $J \times U$.

3) Premiers exemples

Ex. (18): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^{2/3}$. Les fonctions $x_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$

sont toutes deux solutions du problème de Cauchy de c.i. $(0,0)$ (faible régularité de f en 0).

Ex. (19): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Les solutions maximales de (E) sont la

solution nulle et de la forme $x:]-\infty, c[\rightarrow \mathbb{R}$ ou $x:]c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{1}{c-t}$ $t \mapsto \frac{1}{c-t}$
 (voir ANNEXE).

II. Outils pour l'étude des solutions

Cadre: On se place dans le cadre du théorème de C.L.

1) Lemme des bords

Lemme (20): Pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe U voisinage de (t_0, x_0) dans $J \times U$ et $\alpha > 0$ tels que toute solution maximale de c.i. $(t_0, x_0) \in U$ est définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Coro. (21): Soit $K \subset J \times U$ compact, il existe $\alpha(K) > 0$ tel que toute solution maximale de c.i. $(t_0, x_0) \in K$ est définie sur $]t_0 - \alpha(K), t_0 + \alpha(K)[$.

Th. (22): (Lemme des bords)

Soit $x:]t_-, t_+[\rightarrow U$ une solution de (E)

Alors x est maximale à droite ss l'une des deux conditions suivantes est vérifiée: 1) $t_+ = \sup J$

2) $t_+ < \sup J$ et $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U quand $t \rightarrow t_+$.

2) Existence globale en croissance sous-linéaire

Lemme (23) (Gronwall)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert et $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

Soit $\exists k > 0, b \in \mathbb{R} / \forall t \in I, \|y'(t)\| \leq k \|y(t)\| + b$

alors: $\forall t_0 \in I, \forall t \in I, \|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + b \times \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$

Th. (24): On suppose $f: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et qu'il existe $\alpha, \beta: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues telles que: $\forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n, \|f(t, x)\| \leq \alpha(t) \|x\| + \beta(t)$
 Alors, toutes les solutions maximales de (E) sont globales.

Appl. (25): Soient $A: J \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. Alors, les solutions maximales de l'équation différentielle linéaire $X' = AX + B$ sont globales. (Théorème de C.L. linéaire)

III. Résolution explicite

1) Equations différentielles linéaires

Cadre (26): $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

IRq (27): On peut calculer e^A à l'aide de la décomposition de Dunford de A sur $\mathbb{C}$.

Th. (28): La solution maximale de $X' = AX$ de c.i. $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est $X: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0$.

Th. (29): Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $(E): y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $\{(\lambda_j, m_j), 1 \leq j \leq s\}$ les racines de P ainsi que leur multiplicité.

Alors l'espace $\mathcal{Y}$ des solutions de (E) est un $\mathbb{C}$ -espace de dimension n dont $\{t \mapsto t^q e^{\lambda_j t}, 1 \leq j \leq s \text{ et } 0 \leq q \leq m_j - 1\}$ est une base.

Th. (30): (variation de la constante en dimension 1)

Soient $q, \pi: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{Q}$ la primitive de q telle que $\mathcal{Q}(t_0) = 0$. Alors la solution maximale de $x' = q(t)x + \pi(t)$ de c.i. (t_0, x_0) est:

$$x: t \in J \mapsto x_0 e^{\mathcal{Q}(t)} + \int_{t_0}^t e^{\mathcal{Q}(t)-\mathcal{Q}(u)} \pi(u) du$$

2) Equations de Bernoulli

Déf. (31): Une équation de Bernoulli est de la forme $x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$ où: $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p, q: J \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Méthode (32): Soit x une solution qui ne s'annule pas. En posant $z(t) = x(t)^{1-\alpha}$, on se ramène à $z' = (1-\alpha)p(t)z + q(t)$.

IV. Etude qualitative - Approximation numérique.

1) Equation différentielle autonome

Cadac (32): Toujours dans les conditions de C.L., on suppose $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est indépendante de t . Par conséquent, si $x(t, x_0)$ est la solution maximale de (E) de c.i. $(0, x_0)$, $x(t, x(t, x_0)) = x(t + \Delta, x_0)$.

Objectif (34): Etudier les courbes $t \mapsto x(t)$ où x est solution de (E). Ces courbes sont appelées orbites de (E). Elles forment une partition de U appelée portrait de phase.

Def. (35): Un point critique de (E) est $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Def. (36): Soit x_0 un point critique de (E). x_0 est dit 1) stable si: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathcal{S}, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \|x(t_0) - x_0\| \leq \delta$.

a/ x est définie pour tout $t \geq t_0$.

b/ $\forall t \geq t_0, \|x(t) - x_0\| \leq \epsilon$.

2) instable s'il n'est pas stable

3) asymptotiquement stable s'il est stable et $\|x(t) - x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Ex. (37): 0 est asymptotiquement stable pour $y' = y^2$

2) Etude qualitative en dimension 2

Prop. (38): Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$. 0 est alors l'unique point critique de $X' = AX$, et selon les valeurs propres (réelles ou complexes) de A , on peut alors tracer le portrait de phase. (voir ANNEXE)

Exercice (39): (Equation de Hill-Mathieu)

Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, π -périodique et paire.

Etudier l'existence de solutions bornées de

$$(E): y'' + q(x)y = 0.$$

3) Méthode d'Euler

Cadac (40): $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions de C.L. et $(t_0, x_0) \in I \times U$. On souhaite construire une solution approchée de (E) sur un intervalle $[t_0, t_0 + \epsilon_0]$.

Méthode (41): Soit $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + \epsilon_0$ une subdivision de $[t_0, t_0 + \epsilon_0]$ et $h_n = t_{n+1} - t_n$ pour $0 \leq n \leq N-1$. $h_{\max} = \max(h_0, \dots, h_{N-1})$.

La méthode d'Euler consiste à construire une solution approchée y affine par morceaux.

$$\text{Pour } n \geq 0, \text{ on pose } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

$$\text{et } x(t) = x_n + (t - t_n) f(t_n, x_n) \text{ pour } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Puis on fait de même sur $[t_0 - \epsilon_0, t_0]$ avec du pas $h_n < 0$.

Prop. (42): Si $\mathcal{C} = [t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0] \times B_3(x_0, R)$ est un cylindre de sécurité, alors toute solution approchée donnée par la méthode d'Euler est tracée dans $B_3(x_0, R)$.

Def. (43): Une telle solution est dite ϵ -approchée de (E) si

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \|y'(t) - f(t, x(t))\| \leq \epsilon$$

Def. (44): On note pour $u > 0$

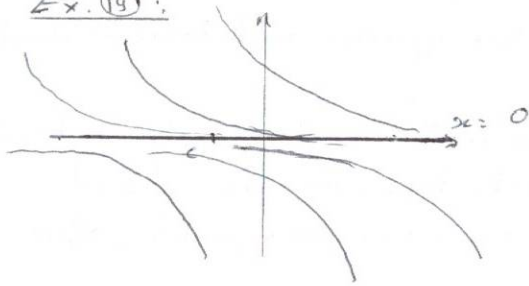
$$\omega_3(u) = \max \{ \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|, (t_i, x_i) \in \mathcal{C} \text{ et } |t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\| \leq u \}$$

Prop. (45): Soit y une solution approchée par la méthode d'Euler, alors l'erreur E vérifie $E \leq \omega_3(\Pi \cdot h_{\max})$ où $\Pi = \max_{\mathcal{C}} \|f(t, x)\|$.

Prop. (46): Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de solutions $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approchées, où $E_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, qui conv. sur $\mathcal{C}$ vers une fonction y , alors y est solution exacte au problème de Cauchy.

ANNEXE

Ex. (19):



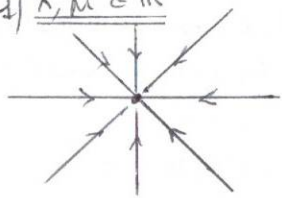
portrait de phase



Prop. (39): $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

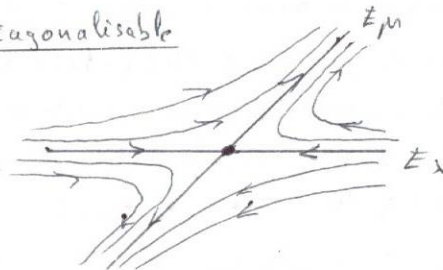
On note λ, μ les valeurs propres de A et E_λ, E_μ les sous-espaces propres associés.

1) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$



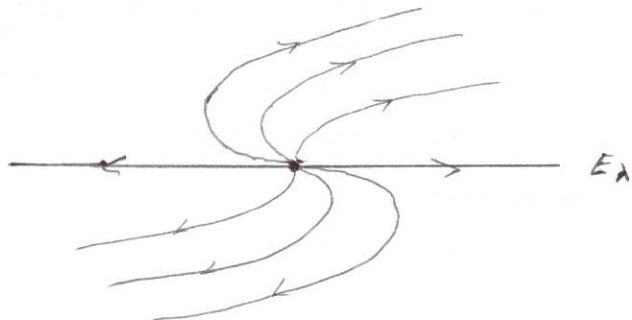
$\lambda = \mu < 0$ (nœud)

A est diagonalisable

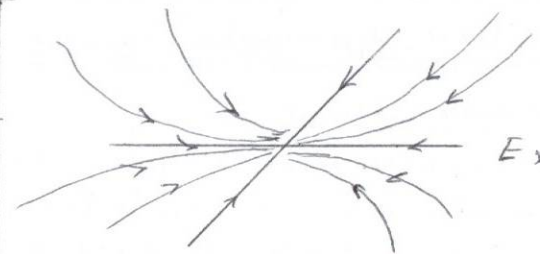


$\lambda < 0 < \mu$ (selle)

A n'est pas diagonalisable

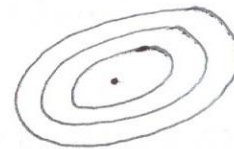


$\lambda > 0$ (nœud dégénéré instable)

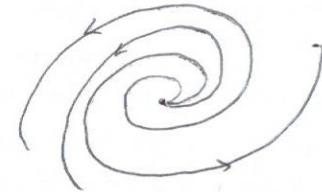


$\mu < \lambda < 0$ (nœud stable)

2) $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et $\mu = \bar{\lambda} = a - ib$



$a = \text{Re } \lambda = 0$ (centre)



$a = \text{Re } \lambda > 0$ (foyer instable)

Références:

- [Dem] Demailly, Analyse numérique et équ. diff
- [Zwi] Zwi, Analyse pour l'agrigation (et id.)