214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Notations : $n, p \in \mathbb{N}^*$

I. Enoncés des théorèmes

1) Théorème d'inversion locale

[Rou] Déf. ① : Soit $k \in \mathbb{N}$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme si elle est bijective, de
54 classe $\mathcal{C}^k$ et si φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Rq ② : Un $\mathcal{C}^0$-difféomorphisme est un homéomorphisme

Th. ③ : (*inversion locale*)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
188 Si : $df(a)$ est inversible
alors : il existe V voisinage ouvert de a (dans U), W voisinage ouvert de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Rq ④ : on a alors $W = f(V)$

Th. ⑤ : (*inversion globale*)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ telle que :
190 1) f est injective
2) pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible.
Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers $f(U)$.

Rq ⑥ : L'hypothèse f injective est indispensable !

204 C-ex. ⑦ : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$. On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Alors pour tout $(x,y) \in U$, $df(x,y)$ est inversible mais f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global ($f(-x,-y) = f(x,y)$)

2) Théorème des fonctions implicites [Rou]

Notations ⑧ : Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur U. On note $d_x f$ (resp. $d_y f$) la différentielle "partielle" de f par rapport à x (resp. y).

i.e. :
$$df(x,y) = \begin{array}{cc} \overset{n}{\longleftrightarrow} & \overset{p}{\longleftrightarrow} \\ \left[\begin{array}{c|c} d_x f(x,y) & d_y f(x,y) \end{array}\right] & \Big\updownarrow p \end{array}$$

Th. ⑨ : (*fonctions implicites*)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a,b) \in U$. 192

Si : 1) $f(a,b) = 0$
2) $d_y f(a,b)$ est inversible

alors : il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tels que $V \times W \subset U$ et $d_y f(x,y)$ soit inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$, et il existe $\varphi : V \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\big((x,y) \in V \times W \text{ et } f(x,y) = 0\big) \Longleftrightarrow \big(x \in V \text{ et } y = \varphi(x)\big)$$

Déf. ⑩ : φ est alors appelée fonction implicite définie par f au voisinage de (a,b).

Rq ⑪ : Géométriquement, le Th. ⑨ signifie qu'au voisinage de 193
(a,b), la surface définie par $f(x,y) = 0$ peut être vue comme le graphe d'une fonction φ

Prop. ⑫. Avec les notations et sous les hypothèses de Th. ⑨, 194
on a : $\forall x \in V, \; d\varphi(x) = -\left(d_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$

Ex. 13 : Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2+y^2-1$.

En $(0,1)$, l'équation $f(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ définit une fonction implicite $\varphi :]-1,1[\longrightarrow]0,+\infty[$
$x \longmapsto y = \sqrt{1-x^2}$

II. Applications

1) Premières applications

[Za] 119 DVP1 **Th. 14 :** $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Coro. 15 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{ M^2,\ M \in GL_n(\mathbb{R}) \}$

[Rou] **Lemme 16 :** Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe V
209 voisinage ouvert de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall A \in V,\ \exists!\ M \in GL_n(\mathbb{R}) \ /\ A = {}^tM A_0 M$$

Th. 17 : *(Lemme de Morse)*

354 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R}))$ de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = u$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 tel que
$\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Appli. 18 : si $n = 2$, le lemme de Morse peut permettre
341 d'étudier la position relative de $\{(x, g(x))\}$ par rapport au plan tangent en $(a, f(a))$. (voir ANNEXE)

2) Théorème de changement de variables. [BP]

Th. 19 : *(changement de variables)*
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable
et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. 239
Alors : $\displaystyle\int_V f(y)\,dy = \int_U f\circ\varphi(x)\,|\det J_\varphi(x)|\,dx$

où $J_\varphi(x)$ est la matrice jacobienne de φ en x.

Ex. 20 : $\varphi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ 245
$(r,\theta) \longmapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exo. 21 : Montrer en considérant $(x,y) \longmapsto e^{-x^2-y^2}$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [FGN]

Prop. 22 : Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et V_n le volume de $\overline{B}(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors, le volume de l'ellipsoïde centré en 0 défini par q est $V_q = \dfrac{V_n}{\sqrt{\det q}}$ 229

Appli. 23 : *(ellipsoïde de John-Loewner)*
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K et de volume minimal. [GT]

Th. 24 : *(Brouwer)* (voir ANNEXE) 64
On note $B = \overline{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : B \longrightarrow B$ une application continue. Alors, f admet (au moins) un point fixe. DVP2

214
②
[Av]
103

III. Géométrie différentielle

1) Sous-variétés. Espace tangent

[Rou] **Déf. (25)** : Soit V une partie de $\mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{N}^*$, $d \leq n$. On dit que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe $\mathcal{C}^1$ si :
197 pour tout $a \in V$, il existe U voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme tels que

$$F(V \cap U) = F(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}] \quad \text{(carte locale)}$$

Th. (26) : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$. Sont équivalentes :

1) V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension d

200 2) pour tout $a \in V$, il existe U voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $df(a)$ est surjective et

$$V \cap U = \{x \in U \,/\, f(x) = 0\} \quad \text{(fonction implicite)}$$

Déf. (27) : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété et $a \in V$. L'espace
198
199 tangent à V en a est :

$$T_aV = \{v \in \mathbb{R}^n \,/\, \exists I \subset \mathbb{R} \text{ intervalle ouvert contenant } 0 \text{ et } \gamma : I \to V \text{ dérivable telle que } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Th. (28) : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension d, et $a \in V$. Alors, T_aV est un sous-espace vectoriel. De plus

201 1) carte locale : $T_aV = dF(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$

2) fonction implicite : $T_aV = \operatorname{Ker} df(a)$

2) Théorème des extrema liés.

[Rou] **Th. (29)** : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction
373 de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage ouvert de V. On suppose que f admet un extremum local en $a \in V$.

Alors, $T_aV \subset \operatorname{Ker} df(a)$

Lemme (30) : Soit $1 \leq d \leq n$ et $l_1 \dots l_d$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes et $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker} l_i \subset \operatorname{Ker} l \iff \exists \lambda_1 \dots \lambda_d \in \mathbb{R} \,/\, l = \sum_{i=1}^{d} l_i$$ [Rou]

Th. (31) : *(extrema liés)*

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1 \dots g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$X = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$ 372

Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que : $df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, dg_i(a)$

Appli. (32) : *(inégalité de Hadamard)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v_1 \dots v_n) \mapsto \det(v_1 \dots v_n)$ et $X = \{(v_1 \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \,/\, \|v_1\|_2 = \dots = \|v_n\|_2 = 1\}$ 405 - 411

1) Mq le maximum de $f_{|X}$ est > 0 et atteint en $(v_1 \dots v_n)$ formant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$

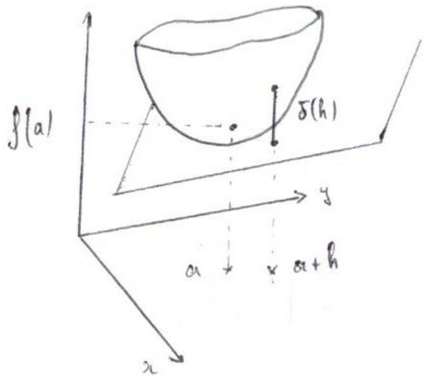
2) En déduire que : $\forall v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^n$, $|\det(v_1 \dots v_n)| \leq \|v_1\|_2 \dots \|v_n\|_2$

Appli. (33) : *(théorème spectral)* [Av]

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de u. 103

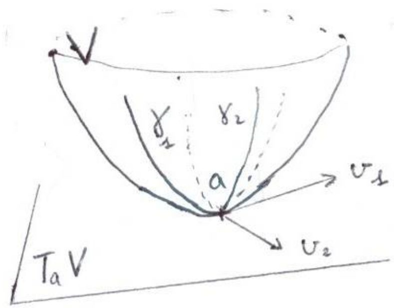
ANNEXE

Appli. (18):



$\delta(h) = f(a+h) - \big(f(a) + df(a)(h)\big)$

Déf. (27):



Références:

- [Rou] Rouvière, PGdCD
- [Za] Zavidovique, Un max de maths
- [BP] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration
- [FGN3] Francinou, Oraux X-ENS Algèbre 3
- [Av] Avez, Calcul différentiel