213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-ev.

I. Espace de Hilbert, produit scalaire et orthogonalité

1) Espace de Hilbert, produit scalaire

[HL] **Déf. ①** : Un produit scalaire sur E est une application $\langle , \rangle : E \times E \to K$ telle :

1) pour tout $y \in E$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
2) pour tout $x, y \in E$, $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ (symétrie hermitienne)
3) pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

84 $(E, \langle , \rangle)$ est appelé un espace préhilbertien, et on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Rq ② : 1) si $K = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire à symétrie hermitienne) définie positive.

2) $\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)$

Ex. ③ : 1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien est un espace préhilbertien
2) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. $L^2(\mu)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$ est un espace préhilbertien.

Prop. ④ : (inégalité de Cauchy-Schwarz)

86 $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, pour tous $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\| \, \|y\|$$

86 ♡ +++ **Coro. ⑤** : 1) $(E, \|\cdot\|)$ est un K-espace vectoriel normé
2) $x \in E \mapsto \|x\|$ est continue
3) $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue

87 **Prop. ⑥** : On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ssi x et y sont liés.

Prop. ⑦ : (identité du parallélogramme) (voir ANNEXE)
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Déf. ⑧ : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle , \rangle$. On dit que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert si E est complet pour la distance associée à $\|\cdot\|$. 88

Ex. ⑨ : 1) $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert (dimension finie)
2) $(L^2(\mu), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert (théorème de Riesz-Fischer)
3) $\mathcal{C}^1([-1,1])$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f \bar{g} \, dx$ est un espace préhilbertien, mais pas un espace de Hilbert (c.Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \times \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $f(x) = |x| \mathbb{1}_{[-1,1]}$, $\|f_n - f\|_2 \to 0$ et $f \notin \mathcal{C}^1([-1,1])$).

$(E, \langle , \rangle)$ est maintenant un espace de Hilbert [HL]

2) Orthogonalité

Déf. ⑩ : $x, y \in E$ sont dits orthogonaux, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.
Si A est une partie de A, l'orthogonal de A est $A^\perp = \{y \in E \,/\, \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$ 87

Prop. ⑪ : Soient $A \subset B \subset E$. Alors :
1) $A^\perp$ est un sev de E 2) $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ 3) $B^\perp \subset A^\perp$

Th. ⑫ : (théorème de Pythagore) 88
Soient $x, y \in E$. Si $x \perp y$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Rq ⑬ : 1) Le théorème de Pythagore s'étend à une famille finie
2) Si $K = \mathbb{R}$, la réciproque est vraie
3) Si $K = \mathbb{C}$, la réciproque est fausse ($x \neq 0$ et ix par exemple)

Th. ⑭ : (théorème de Pythagore infini)
On rappelle que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de E. On note $\sum x_n$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. ♡ +++
On suppose $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonale. Alors

$$\sum x_n \text{ converge dans } E \iff \sum \|x_n\|^2 \text{ converge dans } \mathbb{R}$$

II. Théorème de projection sur un convexe fermé

1) Le théorème. Premières conséquences

[HL] 91 DVP1

Th. 16 : (*théorème de projection sur un convexe fermé*) (voir ANNEXE)
Soit C une partie convexe, fermée et non vide de E. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$.
y est appelé projection de x sur C, noté $p_C(x)$, et est caractérisé par :
$$(y \in E \text{ et } y = p_C(x)) \iff (y \in C \text{ et } \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0)$$

92 **Prop. 17** : Avec les notations précédentes, pour tous $x_1, x_2 \in E$,
$$\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Prop. 18 : Soit F un sev fermé de E et $x \in E$. Alors :
$$(y \in E \text{ et } y = p_F(x)) \iff (y \in F \text{ et } x-y \in F^\perp)$$

93 **Coro 19** : 1) si F est un sev fermé de E, alors $E = F \oplus F^\perp$

2) si F est un sev de E, alors $E = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, F est dense dans E ssi $F^\perp = \{0\}$.

3) si F est un sev de E, alors $F = F^{\perp\perp}$

partie III (*)

2) Applications

[Rou] 384 **Exo 20** : (*moindres carrés*) (voir ANNEXE)
Soient $(x_1,y_1) \dots (x_n,y_n)$ n points de $\mathbb{R}^2$, les x_i non tous égaux. Montrer qu'il existe un unique couple (λ,μ) rendant minimale la somme $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$

[Ru] 225 **Th. 21** : (*Fourier-Plancherel*)
On note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier. Alors, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Appli. 22 : Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$. [Bon] 264

Th. 23 : (*théorème de Riesz-Fréchet*) [HL] DVP1 96
L'application $\Phi : E \longrightarrow E^* = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$, $y \longmapsto \Phi_y = \langle \cdot, y\rangle$ est une isométrie surjective.

Appli. 24 : Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que : $\forall x,y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

Th. 25 : (*théorème de Hahn-Banach géométrique*) [BMP] 97
Soit $A \subset E$ une partie convexe compacte et $B \subset E$ une partie convexe fermée. Alors :
$$A \cap B = \emptyset \implies \exists f \in E^* \,/\, \inf_{a \in A} f(a) > \sup_{b \in B} f(b)$$

Appli. 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $co(O_n(\mathbb{R}))$ l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ et B la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. [ZQ]
Alors, $co(O_n(\mathbb{R})) = B$.

III. Bases hilbertiennes

Cadre 27 : On suppose dorénavant que $(E, \|\cdot\|)$ est séparable.

Déf. 28 : On dit qu'une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E si elle est orthonormale et totale, i.e. :
1) $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$
2) $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$

Th. 29 : Il existe une base hilbertienne de E

Prop. 30 : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E et $x \in E$.
Alors : $x = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \langle x, e_n\rangle = 0$

~ 109 **Prop. 31** : Soit F un sev de E de dimension finie $n \geq 1$ et $(f_1 \dots f_n)$ une base orthonormée de E. Alors ; $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$

Prop. 32 : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Alors :
$\forall x \in E$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel)

Th. 33 : (Bessel-Parseval)
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Sont équivalentes :
1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E
2) $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (égalité de Parseval)
3) $\forall x \in E$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

Coro 34 : Sous les mêmes hypothèses,
$E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une isométrie surjective.

IV. Deux exemples

1) $L^2(I,\rho)$

[BMP] **Cadre 35** : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle

Déf. 36 : On appelle fonction poids une application $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable > 0
110 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. On définit alors
$L^2(I,\rho) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, mesurable, $\int_I |f|^2 \rho\, dx < +\infty \}$

Prop. 37 : $L^2(I,\rho)$ muni de $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f\bar{g}\rho\,dx$ est un espace de Hilbert

Déf./Prop. 38 : On appelle famille des polynômes orthogonaux de $L^2(I,\rho)$ l'unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires obtenus par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(x \in I \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DVP2 **Th. 39** : On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$.
140 Alors, la famille normalisée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex. 40 : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée famille des polynômes 111
de Hermite. $P_0 = 1$; $P_1 = x$; $P_2 = x^2 - \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Appli. 41 : résolution d'EDP (oscillateur harmonique)

2) $L^2(\mathbb{T})$ [20]

Notations 42 : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $L^2(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-p., $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx < +\infty \}$.
On notera $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$,
$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ et $S(f) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)$ (quand elle existe)

Déf. 43 : $N \in \mathbb{N}$: $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N 75
$N \in \mathbb{N}^*$, $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$ ——— Fejér ——— 76

Prop. 44 : $(K_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité

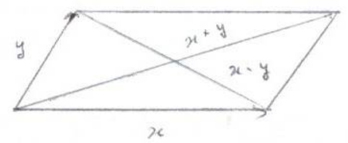
Th. 45 : (Fejér)
1) si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors $\|f * K_N - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ 84
2) si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\|f * K_N - f\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Coro. 46 : 1) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ 86
2) si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f - S_N(f)\|_2 \longrightarrow 0$, $f = S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

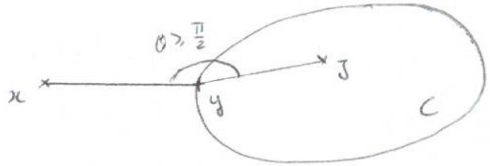
Appli. 47 : Soit f 2π-périodique telle que $f|_{[-\pi,\pi]} = -\mathbb{1}_{[-\pi,0]} + \mathbb{1}_{[0,\pi]}$.
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

ANNEXE

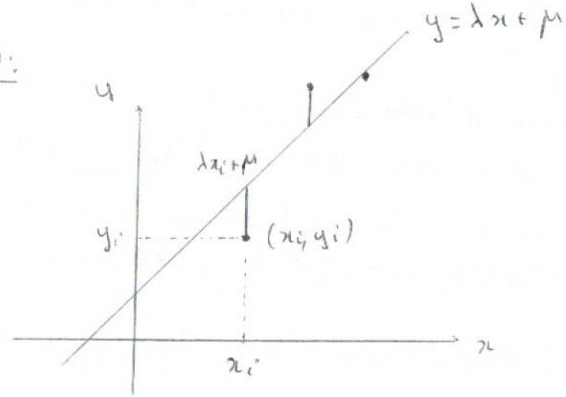
Prop. (7) :



Th. (16) :



Exo. (20) :



Références :

- [HL] Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- [Rou] Rouvière, *PGdCD* (4e éd.)
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [Be] Bernis, *Analyse : 40 développements*
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation* (2e éd.)
- [ZQ] Zuily Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4e éd.)