209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I. Approximation par des polynômes

1) Théorème de Weierstrass

[HL] **Cadre ①**: (X,d) est un espace métrique compact. On rappelle qu'alors
24 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) = \mathcal{C}(X)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

Déf. ②: Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite séparante si, pour tous
28 $x, y \in X$, il existe $h \in H$ telle que $h(x) \neq h(y)$.

Th. ③: (*Weierstrass*)
29 Si H est une sous algèbre séparante de $\mathcal{C}(X)$ contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Ex. ④: 1) $Lip(X,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$

2) Si X est un compact de $\mathbb{R}^n$ et $H = \{x \in X \mapsto P(x),\ P \in \mathbb{R}[X_1 \dots X_n]\}$, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

[Gou] **Appli. ⑤**: (*Théorème des moments*)
306 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.
Alors f est identiquement nulle.

DVP: **Appli. ⑥**: (*Théorème de Brouwer*)
Soit $B = B_f(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $f : B \to B$ une application continue. Alors, f admet (au moins) un point fixe.

2) Espaces $L^2(I,\rho)$

[BMP] **Déf. ⑦**: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On appelle fonction poids une fonction
110 $\rho : I \to \mathbb{R}$, mesurable et >0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

Déf/Prop ⑧: On note $L^2(I,\rho) = \{f : I \to \mathbb{C},\ \text{mesurable},\ \int_I |f|^2 \rho\,dx < +\infty\}$.
Muni de $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f\bar{g}\rho\,dx$, $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf/Prop. ⑨: On appelle famille des polynômes orthogonaux sur $L^2(I,\rho)$, l'unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires obtenus en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(x \in I \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Th. ⑩: On suppose qu'il existe $a>0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ 110
Alors la famille normalisée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex. ⑪: $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée famille des 111
polynômes de Hermite.
$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.
Les polynômes de Hermite sont utilisés dans la résolution d'équations différentielles (*oscillateur harmonique*).

Rq ⑫: Si $I = [a,b]$, le théorème de Weierstrass permet de démontrer directement le Th. ⑩.

II. Espaces L^p, convolution

1) Rappels. Premiers résultats de densité [BP] ou [Ru]

Déf. ⑬: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable. On définit pour $1 \leq p < +\infty$,
$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx\right)^{1/p}$ et $\|f\|_\infty = \operatorname{Inf}\{c>0 \,/\, m(\{x \in \mathbb{R} \,/\, |f(x)|>c\})=0\}$
où m est la mesure de Lebesgue.

Déf. ⑭: On pose pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \text{mesurable},\ \|f\|_p < +\infty\} /_{\text{"= pp"}}$

Th. ⑮: Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

Th. ⑯: {fonctions étagées intégrables}, {fonctions en escalier intégrables} et $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$

Th. ⑰: Soit $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$.
Alors : $\tau : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to L^p \\ a \mapsto \tau_a f\end{array}$ est une application bien définie et continue.

Prop. ⑱: L^2 muni de $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\,dx$ est un espace de Hilbert

2) Produit de convolution

Déf. (18) : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables. Lorsqu'il est bien défini, leur produit de convolution est $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t)\, dt$

Th. (19) : *(inégalité de Young)*
Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$.
Alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Prop. (20) : Si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, alors $f * g \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Th. (21) : $(L^1, +, \times, *)$ est une algèbre associative, commutative, non unitaire.

Th. (22) : Soit $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p$, $k \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})$.
Alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et pour tout $0 \leq j \leq k$, $(f * g)^{(j)} = f * g^{(j)}$.

3) Approximation de l'unité, suite régularisante

Déf. (23) : Une suite $(\varphi_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité si :
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, φ_n est mesurable, ≥ 0 et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dx = 1$
2) $\forall \delta > 0$, $\int_{[-\delta, \delta]^c} \varphi_n\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prop. (24) : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable ≥ 0 telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx = 1$.
Alors $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_n(x) = n \varphi(nx)$ est une approximation de l'unité.

[Ru] 223 **Ex. (25)** : On suppose dans cet exemple que la mesure est $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. $\lambda > 0$
Alors la suite $(h_\lambda)_{\lambda > 0}$ définie par $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation de l'unité quand $\lambda \xrightarrow{>0} 0$.

Déf. (26) : Une approximation de l'unité $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite régularisante si :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$
- $\exists K \subset \mathbb{R}$ un compact tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}\, \varphi_n \subset K$.

Ex. (27) : On définit $\psi : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|_1}$
Alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_n$ obtenue par la Prop. (24) est une suite régularisante (construction de ψ illustrée en <u>ANNEXE</u>)

4) Approximation grâce à la convolution

Th. (28) : Soit $f \in L^\infty$, $g \in L^p$ $1 \leq p < +\infty$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f * \varphi_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De plus, si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f * \varphi_n(x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$. Si f est uniformément continue, $\|f * \varphi_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g * \varphi_n\| \leq \|g\|_p$ et $\|g * \varphi_n - g\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Th. (29) : Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$

Th. (30) : Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$

5) Application : le théorème de Fourier-Plancherel

Cadre (31) : $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, $(h_\lambda)_{\lambda > 0}$ est définie à Ex. (25) [Ru]

Prop. (32) : 1) Soit $H : t \mapsto e^{-|t|}$. Alors $0 < H(\lambda t) \leq 1$ et $(t \mapsto H(\lambda t))_{\lambda > 0}$ croît vers $1_{\mathbb{R}}$ lorsque $\lambda \to 0$ 223
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt}\, dm(t)$
3) $\forall f \in L^1$, $h_\lambda * f(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t)$ où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Th. (33) : *(Fourier-Plancherel)*
On note $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier. Alors, $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de L^2 vers L^2. 225 DEP

Appli. (34) : Calculer $\mathcal{F}(1_{[-1,1]})$, et après un changement de variable, en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ grâce à la formule de Parseval. [Ru] 264

III. Approximation par des fonctions périodiques

1) Rappels sur les séries de Fourier

[ZQ] **Notations (35)** : 1) $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\|\cdot\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dx$ et le produit

~69 scalaire sur $L^2(T)$ est $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}\, dx$.

2) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$,

$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ pour $N \in \mathbb{N}$ et $S(f) = \lim_N S_N(f)$ (si elle existe)

75 **Déf. (36)** : $N \in \mathbb{N}$, $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N,

76 et pour $N \in \mathbb{N}^*$, $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$ ~~~~~ de ——— Fejér d'ordre N

76 **Prop. (37)** : $(K_N)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'unité sur T.

Th. (38) : (*Fejér*)

84 1) Si $f \in \mathcal{C}^0(T)$, alors : $\forall N \geq 1$, $\|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|f * K_N - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

2) Si $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(T)$, alors : $\forall N \geq 1$, $\|f * K_N\|_p \leq \|f\|_p$ et

DVP $\|f * K_N - f\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Rq (39) : Le théorème de Fejér est en fait le Th. (28) sur T

Coro (39) : 1) Si $f \in \mathcal{C}^0(T) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(T)$, alors $(S_N(f))_N$ converge

86 normalement vers f, et $S(f) = f$

2) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(T)$. Si $f \in L^2(T)$,

on a alors : $\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Th. : (*Dirichlet*)

~89 Si $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(T)$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

2) Applications

Appli. (40) : Soit $f \in L^2(T)$ telle que $f_{|[-\pi,\pi]} = -1_{|[-\pi,0]} + 1_{|[0,\pi]}$.

Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Appli. (41) : (*équation de la chaleur*) [ZQ]

Soit $Q =]0,\pi[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,\pi] \times [0,+\infty[$. Il existe une unique 106

application u telle que :

(1) $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q})$ et $u \in \mathcal{C}^2(Q)$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$ DVP

(3) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $\forall t \in [0,+\infty[$

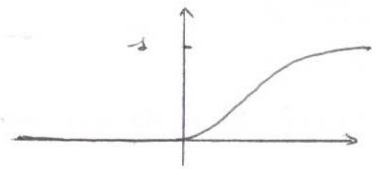
(4) $u(x,0) = h(x)$ $\forall x \in [0,\pi]$ où $h \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$

rajouter injectivité de $L^1(T) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$
$f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

ANNEXE

Ex. (27) :

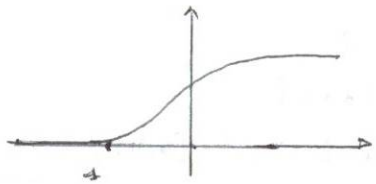
1)



$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

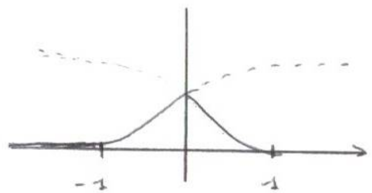
$\theta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$

2)



$\theta(1+x)$

3)



$\theta(1+x) \times \theta(1-x) = \varphi(x)$

Références :

- [HL] Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*
- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3ᵉ éd.)
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation*
- [BP] Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3ᵉ éd.)
- [Fa] Faraut, *Calcul intégral* pour la convolution
- [ZQ] Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4ᵉ éd.)
- [Be] Bernis, *Analyse : 40 développements*