 208 1

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E, F sont deux K-ev. $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Espaces vectoriels normés. Applications linéaires

1) Norme :

[Gou] **Déf. 1** : Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que
- $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- [Ch1] $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (homogénéité positive)
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie).

$(E, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé (evn).

Rq 2 : On considérera désormais que E et F sont des evn

Ex 3 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Alors $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(1 \leq p < +\infty)$
et $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ définissent des normes

2) Si $f \in Lip([0,1])$ et $K(f) = \inf\{k > 0 \,/\, f$ est k-lipschitzienne$\}$, alors
$N : f \mapsto |f(0)| + K(f)$ est une norme sur $Lip([0,1])$ ++

Rq 4 : $d : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \mapsto \|x-y\| \end{array}$ est une distance sur E

Th. 5 : Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ $\forall x \in E$

Ex 6 : $\forall p \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$

Rq 7 : Deux normes équivalentes définissent la même topologie

2) Applications linéaires continues

[Gou] **Notation 8** : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Th. 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Sont équivalentes :
1) f est continue sur E 2) f est continue en 0
3) f est bornée sur la boule unité fermée de E $B_f(0,1)$ 48
4) ——— sphère ——— $S(0,1)$ de E
5) $\exists M > 0 \,/\, \forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ 6) f est lipschitzienne

Déf. 9 : On notera $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. Muni de $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un evn.

Ex 10 : Soit $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ la transformation de Fourier. Alors $\mathcal{F}$ est continue et $\|\mathcal{F}\| = 1$ (⚠ $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$) ✓

Prop 11 : E, F, G trois evn, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \, \|f\|$. En particulier, $\mathcal{L}_c(E)$ a une structure d'algèbre (non commutative). 48

II. Espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Propriétés fondamentales

Th. 12 : 1) $[0,1]$ est compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
2) Les parties compactes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont les parties fermées et bornées
3) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

Rq 13 : ⚠ $\mathbb{R}$ muni de $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$ n'est pas complet

Th. 14 : Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

Coro 15 : Si E est de dimension finie, alors :
1) les compacts de E sont les fermés bornés
2) E est complet (donc fermé)

Rq 16 : Le Th. 14 est faux en dimension infinie. $\|\cdot\|_\infty$ et N de Ex 3 ne sont pas équivalentes sur $Lip([0,1])$ (prendre $f_n(x) = \sin(nx)$) ++ [Gou]

Th. 17 : (Riesz)
$(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie SSI $B_f(0,1)$ est compacte. 56

2) Conséquences

[Gou] 50 **Th (18)** : Si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E)$

Rq (19) : Faux en dimension infinie. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$.

50 On munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|a_n X^n + \dots + a_0\| = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$.

f n'est alors pas continue.

Th (19) : Si E est de dimension finie, alors $GL_c(E)$ est dense dans $\mathcal{L}_c(E)$,

♡ où $GL_c(E) = \{ f \in \mathcal{L}_c(E) \, / \, f$ inversible dans $\mathcal{L}_c(E) \}$.

[NH2G2] **Th (20)** : *(décomposition polaire)*

348 $f : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme

Coro (21) : $g : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \mapsto OS$ est continue et surjective

Appli (22) : voir Prop (23) et Appli (42)

3) Normes matricielles subordonnées

[Lia] **Prop (23)** : Soit $A \in M_n(K)$. Alors : $\|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}|$,

16 $\|A\|_\infty = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$ et $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \max\{ |\lambda|, \lambda \in Sp(A^*A) \}$

[S] **Appli (24)** : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante. Alors,

153 la méthode de Jacobi converge pour A.

III. Espaces de Banach

1) Définition, exemples

Déf (25) : On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si E est complet pour la distance induite par E.

Rq (26) : ⚠ $(Lip([0,1]), N)$ est un espace de Banach, mais pas $(Lip([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (Ctrex : $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ et $f(x) = \sqrt{x}$: $f_n \xrightarrow{CVU} f$ et $f \notin Lip([0,1])$)

Ex (27) : 1) Tout evn de dim. finie est un espace de Banach

2) $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach

Th (28) : $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach ssi les séries de E absolument convergentes sont convergentes.

Appli (25) : $\exp : M \in M_n(K) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ est bien définie

Th (29) : *(Riesz-Fischer)*
Pour tout $1 \le p \le +\infty$, $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet.

2) Endomorphismes continus dans un espace de Banach

Th (30) : Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach [Gou] 49

Cadre (31) : On suppose désormais que E est un espace de Banach

Lemme (32) : *(von Neumann)*
Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|f\| < 1$. Alors $Id_E - f \in GL_c(E)$ et $(Id - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^n$.

Th (33) : $GL_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$. De plus : $GL_c(E) \to GL_c(E)$, $f \mapsto f^{-1}$ est une application continue.

Déf (34) : On dit que $GL_c(E)$ est un groupe topologique

Rq (35) : ⚠ $GL_c(E)$ n'a aucune raison d'être dense dans $\mathcal{L}_c(E)$ si E n'est pas de dimension finie.

C. Ex (36) : Soit $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$. Alors $T \notin \overline{GL_c(\ell^1(\mathbb{N}))}$ ♡

Th (37) : Soit $\mathcal{D}$ un sev de E tel que $\overline{\mathcal{D}} = E$. On suppose F complet. [Poin] 52
Soit $f \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}, F)$. Alors f se prolonge de manière unique en $g \in \mathcal{L}_c(E,F)$

IV. Espaces de Hilbert

1) Définitions, exemples

Déf. (37) : On dit que E est préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire hermitien (ou euclidien si $K=\mathbb{R}$) $\langle , \rangle$. $(E, \langle , \rangle)$ est alors appelé un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$ associée à $\langle , \rangle$.

Ex. (38) : 1) $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x=(x_1 \dots x_n)$, $y=(y_1 \dots y_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est un espace de Hilbert

2) $L^2(\mathbb{R})$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\, dx$ est un espace de Hilbert

3) $\mathcal{C}^1([-1,1])$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\bar{g}\, dx$ est un espace préhilbertien, mais pas un espace de Hilbert.

Notations (39) : E est maintenant un espace de Hilbert. On note $E^* = \mathcal{L}_c(E,K)$

2) Théorème de projection sur un convexe fermé. Premières applications

[HL] 91 Th. (40) : Soit C une partie convexe, fermée de E et $x \in E$. Alors, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x,y) = \|x-y\|$. y est appelé projection de x sur C, notée $p_C(x)$

DVP1 et on a la caractérisation suivante :

$$y \in E,\ y = p_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$$

[BMP] 97 Th. (41) : (Hahn-Banach géométrique)

Soit A une partie convexe compacte de E et B une partie convexe fermée de E telles que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que $\inf_{a\in A} f(a) > \sup_{b \in B} f(b)$.

[ZQ] 205 Appli. (42) : Soit $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|M\|_2 \leq 1\}$ et $\mathrm{co}\, O_n(\mathbb{R})$ l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$. Alors, $\mathrm{co}\, O_n(\mathbb{R}) = B$

3) Conséquences du théorème de projection [HL] 93

Th. (43) : Soit F un sev de E. Alors, $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$.

F est alors dense dans E SSI $F^{\perp} = \{0\}$.

Th. (44) : (Riesz-Fréchet) 96

$\Phi : E \to E^*,\ y \mapsto \Phi_y = \langle \cdot, y\rangle$ est un isomorphisme isométrique. DVP 1

Appli. (45) : Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ $\forall x,y \in E$ (si $K=\mathbb{R}$).

4) Théorème de Fourier-Plancherel [Ru]

Cadre (46) : On note L^p pour $L^p(\mathbb{R})$ et on prend comme mesure $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

Préliminaire (47) : $\lambda > 0$

1/ $(h_\lambda)_\lambda$ définie par $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation de l'unité quand $\lambda \to 0$ 223

2) Soit $H : t \mapsto e^{-|t|}$. Alors $0 < H(\lambda t) \leq 1$ et $(t \mapsto H(\lambda t))$ croît vers 1 quand $\lambda \to 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt}\, dm(t)$

4) $\forall f \in L^1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t)$

Th. (48) : (Fourier-Plancherel) 225

$\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme isométrique de L^2 vers L^2. DVP 2

Appli. (49) : Calculer $\mathcal{F}(1_{[-1,1]})$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. [Ba] 265

Références :

- [Gou] Gourdon, Analyse
- [NH2G2] Caldero, Nouvelles... Tome 1
- [CG] Ciarlet, Introduction...
- [S] (Denis) Serre, Matrices
- [Pom] Pommellet, Cours d'analyse
- [HL] Hirsch Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.
- [BMP] Beck, Objectif agrégation (2e éd.)
- [ZQ] Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation (4e éd.)
- [Ru] Rudin, Analyse réelle et complexe (3e éd.)