207. Prolongement de fonctions - Exemples et applications.

Déf. ① : Soient E, F des ensembles, $A \subset B \subset E$ et $f : A \to F$ une application. On dit que $g : B \to F$ prolonge f si $g_{|A} = f$.

I. Prolongement et continuité

Cadre ② : (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques

1) Prolongement par continuité

[Gou] **Prop. ③** : Soit $D \subset X$, $a \in D$ un point d'accumulation de D. Soit $f : D \setminus \{a\} \to Y$ une application continue. On suppose que $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D\setminus\{a\}}} f(x)$

16 existe. Alors la fonction g définie par :
$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue sur D et appelée prolongement par continuité de f en a.

Ex. ④ : 1) $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0 par 1
2) $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0 par 0
3) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ se prolonge par continuité en 0 par 0.

2) Prolongement par densité

[Pom] **Th. ⑤** : On suppose (Y, δ) complet. Soit A une partie dense de X et

52 $f : A \to Y$ une fonction uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue $g : X \to Y$ qui prolonge f. De plus, g est uniformément continue.

Coro ⑥ : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux evn. Soit A un sev de E dense dans E et $f \in \mathcal{L}_c(A, F)$. Alors, si F est complet, il existe un unique prolongement $g \in \mathcal{L}_c(E, F)$ de f.

[Bu] **Préliminaire ⑦** : On note $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. $\lambda > 0$
1) $(h_\lambda)_\lambda$ définie par $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation continue de l'unité lorsque $\lambda \xrightarrow{\lambda > 0} 0$

223 2) si $H : t \mapsto e^{-|t|}$, alors $0 \leq H(\lambda t) < 1$ et $(t \mapsto H(\lambda t))_\lambda$ croît vers 1 quand $\lambda \xrightarrow{\lambda > 0} 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt} \, dm(t)$
4) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} \, dm(t)$

Th. ⑧ : *(Fourier-Plancherel)* DVP 225
On note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation. Alors, $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ vers $L^2(\mathbb{R})$

Appli ⑨ : Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})$, et en déduire la valeur [Bu] de l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$. 264

Rq ⑩ : On utilise dans le Th. ⑧ la propriété fondamentale suivante : si E est un espace de Hilbert et F un sev de E, alors $E = \bar{F} \oplus F^\perp$.

II. Prolongement et dérivabilité

1) Prolongement d'une fonction dérivable [Gou]

Th. ⑪ : Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f : [a, b[\to E$ une application continue sur $[a, b[$, dérivable sur 76
$]a, b[$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = l$ existe.

Alors, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Rq ⑫ : La condition "$\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$ existe" est suffisante mais non nécessaire : $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable en 0, mais $f'(x)$ diverge quand $x \to 0$.

Appli ⑬ : *(construction d'une suite régularisante)* (voir ANNEXE)
1) Soit $\theta : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Mq θ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) On pose $\varphi : x \mapsto \frac{\theta(1+x)\,\theta(1-x)}{\int_{\mathbb{R}} \theta(1+t)\,\theta(1-t)\,dt}$. Mq $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$
3) Pour $n \geq 1$, on définit $\varphi_n : x \mapsto n\,\varphi(nx)$.
Montrer que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.

2) Equations différentielles (C.L.)

En supposant démontré le théorème de Cauchy-Lipschitz local, un raisonnement par connexité nous permet de montrer le :

Th. (14) : (C.L. global)

Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe une unique solution maximale de $x' = f(t,x)$ de conditions initiales (t_0, x_0).

[20] ~ 371 Th. (15) : (lemme des bouts)

Sous les hypothèses du théorème de C.L., soit $x :]t_-, t_+[\to U$ une solution de $x' = f(t,x)$. Alors, x est maximale à droite SSI :

1) $t^+ = \operatorname{Sup} J$
2) $t^+ < \operatorname{Sup} J$ et $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U lorsque $t \to t^+$.

Csq (16) : (existence globale en croissance sous-linéaire)

Sous les hypothèses du théorème de C.L., avec $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on suppose qu'il existe $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^+$ continues telles que :

$$\forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^n, \quad \|f(t,x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t).$$

Alors, les solutions maximales de $x' = f(t,x)$ sont globales.

Appli (17) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues. On pose $(E) : X' = A(t)X + B(t)$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution globale de (E).

(théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

III. Séries entières. Fonctions holomorphes

1) Séries entières

Cadre (18) : On considère $\sum a_n z^n$ une série entière [Tau] 36

Th./Déf. (19) : Il existe un unique $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ tel que

1) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente (A.C.)
2) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

R est appelé rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $D(0,R)$ le disque de convergence et $\mathcal{C}(0,R)$ le cercle d'incertitude. [EPA]

Rq (20) : Sur $\mathcal{C}(0,R)$, tout peut arriver

1) $\sum (-1)^n z^n$: $R = 1$. La série diverge sur $\mathcal{C}(0,1)$, mais la somme converge 231
2) $\sum \frac{z^n}{n}$: $R = 1$. La série converge sur $\mathcal{C}(0,1) \setminus \{1\}$, diverge en 1
3) $\sum \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$. La série converge normalement sur $\overline{D}(0,1)$

Th. (21) : (Abel angulaire) (voir ANNEXE) [Gou]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Soit $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 263
et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

On note f la somme de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,1)$, et on suppose que $\sum a_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Alors, $f(z) \xrightarrow[z \in \Delta_{\theta_0}]{z \to 1} S$ DVP

Appli (22) : Mq $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$ 264

Rq (23) : La réciproque est fausse (voir Rq (20) 1)).

Th. (22) : (Taubérien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon 1 et de somme f sur $D(0,1)$. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \xrightarrow[|x|<1]{x \to 1} S$.

Alors, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

2) Fonctions holomorphes

Th. 23 : *(principe du prolongement analytique)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, E une partie de Ω qui admet un point d'accumulation dans Ω, f et $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ (analytiques sur Ω) telles que $f_{|E} = g_{|E}$. Alors $f = g$ sur Ω tout entier.

[Ru] **Th. 24 :** *(formule de Cauchy dans un convexe)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe, γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{mcx}$ tel que $\gamma \cup \gamma_{int} \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, $z \notin \gamma$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \times f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Coro 25 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Alors, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$

Appli 26 : Soit $n \geq 1$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Appli 27 : Soit $P = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ pour $z \in P$.
Alors, $\Gamma \in \mathcal{H}(P)$ et Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en tout $-n$, $n \in \mathbb{N}$.

[BMP] **Déf. 28 :** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable > 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$ (fonction poids). On pose
110 $L^2(I,\rho) = \{ f : I \to \mathbb{C}$ mesurable, $\int_I |f|^2 \rho\, dx < +\infty \}$.

Prop. 29 : $L^2(I,\rho)$ muni de $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f \bar{g} \rho\, dx$ est un espace de Hilbert.

Déf. / Prop. 30 : On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique famille orthonormale de $L^2(I,\rho)$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

340 DVP **Th. 31 :** On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$.
Alors, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Ex. 32 : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée famille des polynômes de Hermite. 111
$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

IV. Un exemple de prolongement en algèbre [GL]

Cadre 33 : $(G, \cdot)$ est un groupe abélien

Déf. 34 : Un caractère linéaire sur G est un morphisme de groupes $\chi : G \to (\mathbb{C}^*, \times)$. L'ensemble des caractères sur G, noté $\hat{G}$, est un groupe multiplicatif. 346

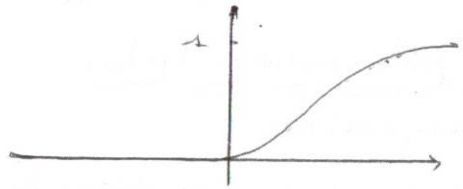
Th. 35 : *(théorème de prolongement des caractères)* 347
Soit H un sous groupe de G et $\rho_H : \hat{G} \to \hat{H}$, $\chi \mapsto \chi_{|H}$. ρ_H est un morphisme de groupes.
Si $[G:H] < +\infty$, alors ρ_H est surjectif, i.e. tout caractère linéaire sur H se prolonge en un caractère linéaire sur G.

Appli 36 : *(théorème de structure des groupes abéliens finis (g.a.f))*
Soit G un g.a.f., $|G| \geq 2$. Alors il existe des entiers $d_1 \dots d_s \geq 2$ tels que $d_1 | d_2 | \dots | d_s$ et $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}$. 358
De plus, $d_1 \dots d_s$ sont uniques et ne dépendent que de la classe d'isomorphisme de G.

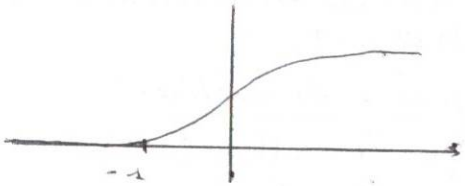
Ex 37 : Si $|G| = 60$, $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

ANNEXE

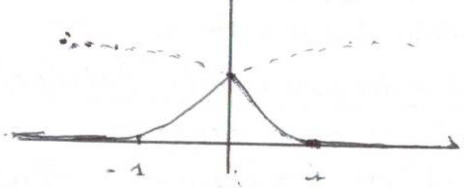
Appl. 13 :



$\theta(x)$

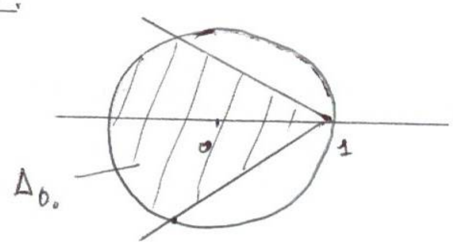


$\theta(1+x)$



$\theta(1+x)\,\theta(1-x)$

Th. 21 :



Références :

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [Pom] Pommellet, *Cours d'analyse*
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [Be] Bernis, *Analyse : 40 développements*
- [ZQ] Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe pour la L3*
- [ElA] El Amrani, *Suites et séries ...*
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation* (2e éd.)
- [GC] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2e éd.)