205. Espaces complets. Exemples et applications

Cadre : (X,d) (Y,δ) sont des espaces métriques. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $(E, \|\cdot\|)$ est un K-evn. $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Espaces complets

1) Suites de Cauchy

[Gou] Déf. ①: Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est dite de Cauchy si :

20 $\forall \varepsilon>0, \exists n \in \mathbb{N} / \forall p,q \geq n, d(x_p,x_q) \leq \varepsilon$.

Prop. ②: 1) Toute suite convergente est de Cauchy

2) Une suite de Cauchy est bornée

Rq ③: La réciproque de Prop. ② 1) est fausse. $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $]0,1[$, mais ne converge pas dans $]0,1[$.

+♡ Th. ④: Une suite de Cauchy de X converge SSI elle admet une valeur d'adhérence dans X.

Rq ⑤: La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique, i.e. ne passe pas bien à la continuité. $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme, $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mais $(\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

♡

+♡ Prop ⑥: Soit $(x_n)_n$ une suite de X et $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y.

20 Coro ⑦: Si d et d' sont deux distances Lipschitz-équivalentes sur X, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (X,d) SSI elle est de Cauchy dans (X,d').

2) Espaces complets.

[Gou] Déf. ⑧: (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X. Une partie A de (X,d) est dite complète si elle l'est pour la topologie induite.

20

Prop. ⑨: 1) Une partie complète d'un espace métrique est fermée. 20

2) Une partie fermée d'un espace métrique complet est complète

Prop. ⑩: Soient $(X_1,d_1)\dots(X_n,d_n)$ des espaces métriques. On note d la distance produit sur $X_1 \times \dots \times X_n = X$. Alors, (X,d) est complet SSI pour tout $1 \leq i \leq n$, (X_i,d_i) est complet.

Prop. ⑪: Sont équivalentes

1) (X,d) est complet

2) Toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

3) Premier exemple fondamental.

Th. ⑫: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

Rq ⑬: ⚠ $d : (x,y) \longmapsto |e^{-x} - e^{-y}|$ est une distance sur $\mathbb{R}$, mais $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet car la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$ mais ne converge pas. [Gou]

Th. ⑭: Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes 50

Coro ⑮: Si $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie, alors E est complet. [Gou]

4) Compacité et complétude 30

Prop. ⑯: Si (X,d) est compact, alors (X,d) est complet

Rq ⑰: Réciproque fausse ($\mathbb{R}$ par exemple)

Déf. ⑱: X est précompact si pour tout $\varepsilon>0$, on peut recouvrir X par une union finie de boules ouvertes de rayon ε.

Ex ⑲: $]0,1[$ est précompact 32

Th. ⑳: (X,d) est compact SSI il est précompact et complet.

II. Fonctions et espaces complets

[Gou] **Déf. (21)**: On note $B(X,Y)$ l'ensemble des applications bornées de X vers Y et $\mathcal{C}_b(X,Y)=\{f\in B(X,Y),\ f \text{ continue}\}$. On les munit de la distance de la convergence uniforme notée d_∞.

21 **Th. (22)**: Si Y est complet, alors $(B(X,Y), d_\infty)$ est complet. $\mathcal{C}_b(X,Y)$ est alors également complet.

Ex. (23): $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet

Rq (24): Si $B(X,Y)$ est complet, une partie de $B(X,Y)$ n'est pas nécessairement complète.

Ex. (25): $(Lip([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet

Rq. (26): Le Th. (22) joue un rôle fondamental dans la démonstration de certains théorèmes, comme celui d'Ascoli.

Th. (27): (*Théorème du point fixe de Picard-Banach*)
Soit (X,d) un espace complet et $f:X\to X$ une application
21 strictement contractante, i.e. telle qu'il existe $0<k<1$ tel que pour tout $(x,y)\in X^2$, $d(f(x),f(y))\le k\, d(x,y)$.
Alors f admet un unique point fixe.

Appli. (28): (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*)
Soit $J\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: J\times U\to\mathbb{R}^n$ continue. et $(t_0,x_0)\in J\times U$.
1) local: Soit $\mathcal{C}=[t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0]\times B_f(x_0,R)$ un cylindre de sécurité centré en (t_0,x_0). Si $f|_{\mathcal{C}}$ est k-lipschitzienne, alors pour tout intervalle
IVP 1 ouvert $t_0\in I\subset\,]t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0[$, il existe une unique fonction $x: I\to U$ telle $x'=f(t,x)$ et $x(t_0)=x_0$.
2) global: Si f est lipschitzienne par rapport à la 2e variable, alors il existe une unique solution maximale de $x'=f(t,x)$ de conditions initiales (t_0,x_0).

III. Espaces de Banach

1) Définition. Applications linéaires continues

Déf. (29): $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la distance induite par $\|\cdot\|$ [Gou]

C-Ex (30): 1) Si E est de dimension finie, $(E,\|\cdot\|)$ est complet pour tout $\|\cdot\|$
2) on a vu que $(Lip([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Banach

Th. (31): $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach SSI les séries absolument convergentes (A.C.) sont convergentes.

Déf. (32): On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ les applications linéaires continues de E dans F, i.e. $f\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|f\| = \inf(\{c>0 / \forall x\in E,\ \|f(x)\|_F\le c\|x\|_E\}) = \sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F<+\infty$ 48

Th. (33): Si F est un Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un Banach.

Lemme: (*Neumann*)
Soit $f\in\mathcal{L}_c(E)$ telle que $\|f\|<1$. Alors, $id-f$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$. 49

Déf. (33): On notera $GL_c(E)$ l'ensemble des inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$

Th. (34): $GL_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$. De plus, $f\mapsto f^{-1}$ est continue dans $GL_c(E)$.

Rq (35): On dit que $GL_c(E)$ est un groupe topologique

Rq (36): La démonstration de Th. (34) pour $GL_n(K)$ est beaucoup plus facile...

2) Espaces de Hilbert

Cadre (37): $(E,\langle,\rangle)$ est un espace préhilbertien [HL]

Déf. (38): On dit que $(E,\langle,\rangle)$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$ associée à $\langle,\rangle$. 84

Ex. (39): $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien est un espace de Hilbert.

Th. (39) : (projection sur un convexe fermé) (voir ANNEXE)
Soit E un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée de E.
91 Alors : $\forall x \in E, \exists ! y \in C \,/\, \|x-y\| = d(x, C)$.
Ce point est appelé projeté de x sur C, noté $p_C(x)$. On a de plus.
$(y \in E,\ y = p_C(x)) \iff y \in C$ et $\forall z \in C,\ Re\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$

93 **Coro. (40)** : Soit E un Hilbert et F un sev de E. Alors, $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$
F est alors dense dans E ssi $F^{\perp} = \{0\}$

DVP **Appli. (41)** : (théorème de Riesz-Fréchet)
Soit E un espace de Hilbert et $E^* = \mathcal{L}c(E, K)$.
96 Alors $\Phi : E \longrightarrow E^*$, $y \longmapsto \Phi_y = \langle \cdot, y\rangle$ est une isométrie surjective.

IV. Espaces L^p.

Cadre (42) : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré

1) Cas général

[Ru] **Déf. (43)** : Soit $f : X \longrightarrow K$ mesurable. On définit pour $1 \leq p < +\infty$,
$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ et $\|f\|_\infty = Inf(\{c>0 \,/\, \mu(\{x\in X \,/\, |f(x)| \geq c\}) = 0\})$

Déf. (44) : Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mu) = \{f : X \to K$ mesurable, $\|f\|_p < +\infty\} / {}_{\text{"=pp"}}$

Th. (45) : (inégalité de Hölder)
Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$.
Alors, $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Coro. (46) : (inégalité de Minkowski)
Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $f, g \in L^p(\mu)$. Alors, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Coro (47) : Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un evn.

82-83 **Th. (48)** : (Riesz-Fischer)
DVP Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet

2) Résultats de densité dans $L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p < +\infty$

Th. (49) : {fonctions étagées intégrables}, {fonctions en escalier intégrables} et $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

Th. (50) : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

Th. (51) : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

3) L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$

Prop. (52) : $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\, dx$ est un produit hermitien sur $L^2(\mathbb{R})$

Coro (53) : $(L^2(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$ est un espace de Hilbert [Ru]

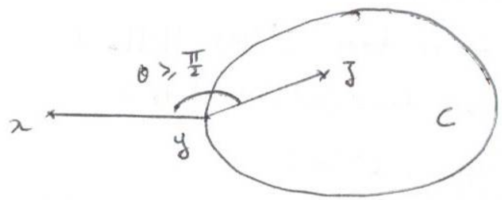
Appli. (54) : (théorème de Fourier-Plancherel) 225
On note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation. Alors, $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. [Bu]

Appli. (55) : Soit $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Calculer $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, et en 264
déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Appli (39bis) : (moindres carrés) [Rou]
Soient n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i non tous égaux. Alors il 385
existe λ et μ uniques rendant minimale $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$

ANNEXE

Th (39) :



Références :

- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [HL] Hirsch-Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle
- [Ru] Rudin, Analyse réelle et complexe (3e éd.)
- [Rou] Rouvière, PGdCD
- [Ber] Bernis, Analyse : 40 développements