203- Utilisation de la notion de compacité. (1)

Cadre : (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques. On écrira evn pour espace vectoriel normé. $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E, F sont des K-evn. $n\in\mathbb{N}^*$

I. Définition, propriétés. Continuité et compacité

1) Définitions

Déf. (1) : 1) Un espace topologique séparé Z est dit compact si de tout recouvrement de Z par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue (B.L.))

Une partie $A\subset Z$ est dite compacte si elle l'est pour la topologie induite.

2) Z est dit séquentiellement compact si de toute suite de Z, on peut extraire une sous-suite qui converge dans Z (propriété de Bolzano-Weierstrass (B.W.))

Ex. (2) : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de X et $x\in X$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
Alors $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ est compact.

[Gou] Th. (3) : (X,d) vérifie B.L. $\Leftrightarrow$ (X,d) vérifie B.W.

28 Rq (4) : Pas toujours vrai dans le cas d'un espace topologique.
Si $S=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors $E=\{0,1\}^S$ est compact mais non séquentiellement compact.

On s'intéressera dorénavant exclusivement à des espaces métriques.

2) Propriétés fondamentales. Lien avec la complétude

[Gou] Prop. (5) : 1) Une réunion finie de compacts est compacte.

28 2) Une intersection (quelconque) de compacts est compacte.

30 Prop. (6) : 1) Si X est compact et $A\subset X$ est fermé, alors A est compact.

2) Soit $A\subset X$. Si A est compact, alors A est fermé et borné.

30 Prop. (7) : Si (X,d) est compact, alors (X,d) est complet.

32 Déf. (8) : X est dit précompact si pour tout $\varepsilon>0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Ex. (9) : $]0,1[$ est précompact

Th. (10) : (X,d) est compact SSI (X,d) est précompact et complet 32

3) Continuité et compacité : premières applications [Gou]

Prop. (11) : Si $f: X\to Y$ est continue et X est compact, alors $f(X)$ est compact 31

Th. (12) : $[0,1]$ est compact dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Coro (13) : Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées 30

Coro (14) : $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est complet

Prop. (15) : Si $f: X\to\mathbb{R}$ est continue et X est compact, alors f est bornée 31
et atteint ses bornes.

Th. (16) : (Rolle) 73

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, tq $f(a)=f(b)$.
Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. 74

Appli (17) : (égalité des accroissements finis) (à mettre ...)

Th. (18) : (Heine) 31

Si X est compact et $f: X\to Y$ est continue, alors f est uniformément continue.

Appli. (19) : (sommes de Riemann) 128

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ $n\geq 1$.
Alors $S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,dt$.

II. Théorème de Weierstrass. Théorème d'Ascoli. [HL]

1) Théorème de Weierstrass

Cadre (20) : (X,d) est supposé compact. $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})=\mathcal{C}(X)$ est muni de d_∞, 28
distance de la convergence uniforme. $(\mathcal{C}(X),d_\infty)$ est complet.

Déf. (21) : Une partie $H\subset\mathcal{C}(X)$ est dite séparante si pour tout $x,y\in X$, il existe $h\in H$ telle que $h(x)\neq h(y)$.

Th. 22 : (*Weierstrass*)

29 Toute sous algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$.

Ex. 23 : 1) $Lip(X,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$

2) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ et $H = \{x \in X \mapsto P(x), P \in \mathbb{R}[X_1 \dots X_n]\}$, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

[Gou] **Appli. 24** : (*théorème des moments*)

306 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f \equiv 0$.

2) Théorème d'Ascoli.

[ZQ] **Cadre 25** : (X,d) et (Y,δ) sont compacts.

Déf. 26 : Une partie $A \subset \mathcal{C}(X,Y)$ est dite équicontinue si :

149 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x,y \in X,\ d(x,y) \le \eta \Rightarrow \forall f \in A,\ \delta(f(x),f(y)) \le \varepsilon$

Th. 27 : (*Ascoli*)

Soit $A \subset \mathcal{C}(X,Y)$. Sont équivalentes

1) A est équicontinue

2) A est relativement compacte, i.e. $\bar{A}$ est compacte.

Appli. 28 : (*Théorème de Montel*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. $\mathcal{H}(\Omega)$ est muni de la distance de la convergence

154 uniforme sur tout compact de Ω. A est une partie de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Alors, A est relativement compacte SSI pour tout compact $K \subset \Omega$,

$$\sup_{f \in A} \sup_{z \in K} |f(z)| < +\infty.$$

III. Applications de la compacité en dimension finie

[Gou] 50 **Th. 29** : Sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Coro. 30 : Si E est un K-ev de dimension finie, alors

1) Les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées

2) E est complet

mettre c.ex. si CVU de $(f_n)_n$ $\mathcal{C}^1$ mais pas $(df_n)_n$

Th. 31 : (*Brouwer*) (voir ANNEXE) [GT]

Soit $B = \bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to B$ continue. 64

Alors, f admet (*au moins*) un point fixe. DVP 1

Prop. 32 : Si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.

Ex. 33 : $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ est continue. $GL_n(K)$ est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(K)$

Rq 34 : Si E est un espace de Banach de dimension infinie, $GL_c(E)$ est toujours un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$ mais c'est nettement plus difficile à montrer.

Th. 35 : (*ellipsoïde de John-Loewner*) [FGN3]

229 Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. DVP 2

Th. 36 : (*théorème spectral*) [Gou]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors, f admet 244

une valeur propre. Il existe alors une bon de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de f.

Th. 37 : (*Riesz*)

$(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie SSI $B_f(0,1)$ est compacte. 56

Ex. 38 : La boule unité fermée de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte.

IV. Différentiabilité, holomorphie et compacité

1) Différentiabilité [Rou]

Th. 38 : (*inégalité des accroissements finis*)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues

dérivables sur $]a,b[$ telles que : $\forall x \in]a,b[,\ \|df(x)\| \le g(x)$ 106

Alors : $\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a)$

Th. 39 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $(f_n)_n : U \to \mathbb{R}^p$ suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. Si : 117

1) $\exists x_0 \in U \,/\, (f_n(x_0))_n$ converge

2) U est connexe

3) $(df_n)_n$ converge localement uniformément vers $\Phi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Alors, $(f_n)_n$ converge localement uniformément vers $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $df(x) = \Phi(x)\ \forall x \in U$.

Appli. (39) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$)

118 L'exponentielle matricielle joue un rôle fondamental dans la résolution des systèmes différentiels linéaires.

2) Holomorphie

[Tau] Th. (40) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $H(\Omega)$. On

89 suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors $f \in H(\Omega)$.

Appli. (41) : On pose pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Alors ζ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, s > 1\}$.

V. Décomposition polaire et conséquences

Notations (42) : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM = M\}$, $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = I_n\}$

[NH2G2] $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX > 0\}$.

Th. (43) : *(décomposition polaire)*

348 $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme

Appli. (44) : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

où $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ et $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$

351 Appli. (45) : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même

[ZQ] Lemme (46) : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n et $K \subset E$ une

160 partie compacte de E. Alors son enveloppe convexe $\mathrm{co}\, K$ est compacte.

~ Lemme (47). Soit E un espace de Hilbert réel et C une partie de E.

205 Alors : $x \in \overline{\mathrm{co}\, C} \iff \forall f \in E^*, f(x) \le \sup_{y \in C} f(y)$

Th. (48) : Soit $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \|M\|_2 \le 1\}$ où $\|M\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Mx\|_2$ 205

Alors, $\mathrm{co}\, O_n(\mathbb{R}) = B$.

Cadre : (X,d) est un espace métrique. On écrira evn pour espace vectoriel normé. E, F sont des $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) - evn.

I. Définitions. Premières propriétés

1) Définitions

Déf. ① : Un espace topologique Z est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement de Z par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue (B.L.)).

Z est dit séquentiellement compact s'il est séparé et si de toute suite de Z, on peut extraire une sous-suite qui converge dans Z (propriété de Bolzano-Weierstrass (B.W.))

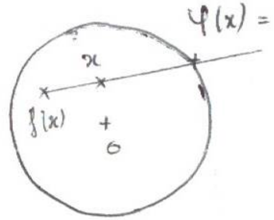
Ex. ② : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de X et $x \in X$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
Alors $\{x_n, n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact

Rq

ANNEXE

Th. ㉛ : (Brouwer)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(x)\,(x - f(x))$$



Références :

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3ᵉ éd.)
- [ZQ] Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4ᵉ éd.)
- [HL] Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*
- [NH2G2] Caldero, *Nouvelles ... Tome 1*
- [GT] Gonnord, Tosel, *Calcul différentiel*
- [FGN3] Francinou, *Oraux X-ENS Algèbre 3*
- [Rou] Rouvière, *PGdCD*
- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe pour la L3*