Notations : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Fonctions continues sur un compact

Cadre ①: (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques

[Gou] 1) Définitions. Propriétés fondamentales

Déf. ②: $f : X \to Y$ est dite bornée si : $\forall y_0 \in Y, \exists R>0 / \forall x \in X, \delta(f(x), f(y_0)) \leq R$.

232 ~ On note $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des applications bornée, que l'on munit de $d_\infty : (f,g) \longmapsto \sup_{x\in X} \delta(f(x),g(x))$ appelée distance de la convergence uniforme (CVU).

Déf. ③: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f : X \to Y$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si : $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in X, \delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ (CVU) $\Leftrightarrow d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$.

231 Th. ④: Si (f_n) CVU vers f et pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue, alors f est continue.

233 Th. ⑤: Si Y est complet, alors $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ est complet

231 Coro ⑥: Si Y est complet, alors $\mathcal{C}_b(X,Y), d_\infty)$ est complet

Th. ⑦: Si X est compact et $f : X \to Y$ est continue, alors $f(X)$ est compact

Coro ⑧: Si Y est complet et X est compact, alors $(\mathcal{C}(X,Y), d_\infty)$ est complet

Rq ⑨: Le coro ⑥ joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz local.

31 Coro ⑩: Si X est compact et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes

♡ Appli ⑪: Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

Th. ⑫: (Heine)

31 Si X est compact et $f : X \to Y$ est continue, alors f est uniformément continue.

Appli ⑬: (sommes de Riemann)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue. 129

Alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

2) Théorèmes de Weierstrass et d'Ascoli

Cadre ⑭: X et Y sont supposés compacts. On notera $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$. [HL]

Déf. ⑮: Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite séparante si pour tout $(x,y)\in X^2, x\neq y$, il existe $h\in H$ telle que $h(x)\neq h(y)$ 28

Th. ⑯: (Weierstrass)

Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$. 29

Ex. ⑰: 1) $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ 29

2) Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$ et $H = \{x\in X \mapsto P(x), P\in\mathbb{R}[X_1 \dots X_d]\}$, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$ [Gou]

Appli ⑱: (théorème des moments)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$ 306

Alors, f est identiquement nulle.

Appli ⑲: (théorème de Brouwer) [GT]

Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$ et $f : B \to B$ une application continue. Alors, f admet (au moins) un point fixe. 64

Déf. ⑳: Une partie A de $\mathcal{C}(X,Y)$ est dite équicontinue si : $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 / \forall x,y \in X, d(x,y)\leq\eta \Rightarrow \forall f\in A, \delta(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$. [ZQ]

Th. ㉑: (Ascoli)

Soit A une partie de $\mathcal{C}(X,Y)$. Sont équivalentes : 149

1) A est équicontinue

2) A est relativement compacte, i.e. $\overline{A}$ est compacte.

Appli. (22) : *(Théorème de Montel)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. $\mathcal{H}(\Omega)$ est muni de la distance de la
154 convergence uniforme sur tout compact de Ω. A est une partie de $\mathcal{H}(\Omega)$.
Alors A est relativement compacte ssi pour tout compact $K \subset \Omega$, $\sup_{f \in A} \sup_{z \in K} |f(z)| < +\infty$.

II. Espaces L^p

Cadre (23) : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. $f : X \to K$ mesurable

[Ru] 1) Définition et structure des espaces $L^p(\mu)$

80 **Déf. (24) :** On définit pour $1 \le p < +\infty$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$

81 et $\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 \,/\, \mu(\{x \in X \,/\, f(x) > c\}) = 0\}$.

Déf. (25) : Pour $1 \le p < +\infty$, on pose $L^p(\mu) = \{f : X \to K \text{ mesurable} \,/\, \|f\|_p < +\infty\} /_{``=pp"}$

et $L^\infty(\mu) = \{f : X \to K \text{ mesurable} \,/\, \|f\|_\infty < +\infty\} /_{``=pp"}$.

Th. (26) : *(inégalité de Hölder)*

79 81 Soient $p, q \ge 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$.
Alors $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$

Coro. (27) : *(inégalité de Minkowski)*

81 Soit $1 \le p \le +\infty$, $f, g \in L^p(\mu)$. Alors $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Coro (28) : Pour tout $1 \le p \le +\infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un K-evn

82 **Th. (29) :** *(Riesz-Fischer)*
DVP 1 Pour tout $1 \le p \le +\infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet

Rq (30) : On montre dans la démonstration du Th. (29) que si
83 $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $1 \le p < +\infty$, alors il existe une sous-suite de (f_n)
qui converge simplement vers f μ pp.

On ne peut pas faire mieux !

2) Densité dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$

Notation (31) : On écrira L^p pour $L^p(\mathbb{R})$

Th. (32) : {fonctions étagées intégrables}, {fonctions en escalier} et $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $1 \le p < +\infty$

Rq (33) : Pour $L^p(\mathbb{R}^d)$, on utilise le lemme d'Urysohn pour montrer la densité de $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$.

Déf. (34) : Soit $f : \mathbb{R} \to K$ mesurable et $a \in \mathbb{R}$. On définit $\tau_a : x \mapsto f(x-a)$

Th. (35) : $\tau : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to L^p \\ a \mapsto \tau_a f \end{array}$ est continue pour $1 \le p < +\infty$

Déf. (36) : $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité si

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, φ_n est ≥ 0, mesurable et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, dx = 1$
2) $\forall \delta > 0$, $\int_{[-\delta, \delta]^c} \varphi_n \, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prop. (37) : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\varphi \ge 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n : x \mapsto n\varphi(nx)$. Alors $(\varphi_n)_n$ est une approximation de l'unité.

Th. (38) : Soit $(\varphi_n)_n$ une approximation de l'unité.

1) Si $f \in L^\infty$ et f est uniformément continue, alors $\|f - f * \varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
2) Si $f \in L^p$, $1 \le p < +\infty$, alors $\|f - f * \varphi_n\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rq (39) : Le Th. (38) 1) s'applique entre autre à $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$!

Th. (40) : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $1 \le p < +\infty$

Th. (41) : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $1 \le p < +\infty$

III. Espaces L^2

1) $L^2(\mathbb{R})$. Théorème de Fourier-Plancherel

Th. 42 : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sev de E.
Alors, $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$

Coro. 43 : F est dense dans E ssi $F^{\perp} = \{0\}$

Déf. 44 : On définit pour $f, g \in L^2$: $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x) e(x)\, dx$

Th. 45 : $(L^2, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert séparable

[Ru] **Prop. 46** : Soit $\lambda > 0$. On munit $\mathbb{R}$ de $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$.

1) $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ définie par $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ est une approximation

223 2) Soit $H(t) = e^{-|t|}$. Alors $0 \le H(\lambda t) \le 1$ et $H(\lambda t) \nearrow 1$ quand $\lambda \to 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt}\, dm(t)$

4) $\forall f \in L^1$, $f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t)$

DVP 225 **Th. 47** : *(Fourier-Plancherel)*
La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme isométrique de L^2 vers L^2.

[Ber] 264 **Appli. 48** : *(intégrale de Dirichlet)*
Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]})$ et en déduire, à l'aide de la formule de Parseval, la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt$

2) $L^2(T)$

[ZQ] **Cadre 49** : $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $L^2(T)$ muni de $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\, dt$ est un espace de Hilbert séparable. Pour $f \in L^1(T)$, on notera $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ ses coefficients de Fourier, $S_N(f)$ et $S(f)$ respectivement ses sommes partielles de Fourier et la somme de sa série de Fourier (si elle existe).

On pose $e_n : x \mapsto e^{inx}$ $n \in \mathbb{Z}$

Déf. 50 : $N \in \mathbb{N}$: $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$ pour $N \in \mathbb{N}^*$ 75

Prop. 51 : $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité sur T 76

On a alors comme corollaire de Th. 38 (*théorème de Fejér dans le cas 2π-périodique*) :

Coro 52 : 1) $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(T)$ 86

2) $\forall f \in L^2(T)$, $\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (Parseval)

Appli. 53 : En considérant la fonction f 2π-périodique telle que : $f|_{[-\pi,\pi]} = -\mathbb{1}_{[-\pi,0]} + \mathbb{1}_{[0,\pi]}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3) $L^2(I, \mathbb{C})$

si besoin... [BMP] 110-140

Références :

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [HL] Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- [GT] Gonnord Tosel, *Calcul différentiel*
- [ZQ] Zuily Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4e éd.)
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [Ber] Bernis, *Analyse : 40 développements*