171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Cadre : E est un $\mathbb{R}$-ev, E^* est son dual et $\mathcal{B}$ est une base de E. $n \in \mathbb{N}^*$. On écrira bon pour base orthonormée.

I. Formes quadratiques réelles

1) Définitions. Forme polaire.

[Gri] Déf. 1 : On dit qu'une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que pour
301 tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$.

Prop. 2 : Soit q une forme quadratique sur E et φ une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour $x \in E$. Alors :
$\forall (x,y) \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)] = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$

φ est donc unique, et est appelée forme polaire de q.

Notation 3 : q désigne dorénavant une forme quadratique sur E.

Ex. 4 : 1) $q : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$

2) $q : f \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx$

Déf. 5 : Soit φ la forme polaire de q.

1) Le rang de q (et de φ) est le rang de $j : E \to E^*$, $y \mapsto \varphi(\cdot, y)$

297 2) Le noyau de q (et de φ) est $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}\, \varphi = \mathrm{Ker}\, j = \{x \in E \,/\, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$.
Si $\mathrm{Ker}\, q = \{0\}$, q est dite non dégénérée.

303 3) Le cône isotrope de q est $\mathcal{C}_q = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$. $x \in \mathcal{C}_q$ est dit isotrope, et si $\mathcal{C}_q = \{0\}$ q est dite définie

303 Prop. 6 : $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathcal{C}(q)$

303 Rq 7 : Réciproque fausse. Si $q : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$, alors $\mathrm{Ker}\, q = \{0\}$ mais $\mathcal{C}_q = \{(t, \pm t), t \in \mathbb{R}\}$.

2) Cas de la dimension finie $\dim E = n$ [Gri]

Déf. 8 : Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$. La matrice de q dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi = [\varphi(e_i, e_j)]$ 295

Prop. 9 : Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi$.

1) $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si $x, y \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y$, alors $\varphi(x,y) = {}^tX M Y$. 296

2) Si $\mathcal{B}'$ base de E, $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, \varphi$, alors $M' = {}^tPMP$.

3) $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Ker}\, \varphi \simeq \mathrm{Ker}\, M$. De plus, $\dim E = \mathrm{rg}\, \varphi + \dim(\mathrm{Ker}\, \varphi)$. 297

4) q est non dégénérée ssi $\det M \neq 0$.

Ex. 10 : voir [ANNEXE]

Rq 11 : $q(x)$ est exactement un polynôme homogène de degré en les coordonnées $(x_1 \dots x_n)$ de x dans $\mathcal{B}$. 299

3) Formes quadratiques (définies) positives [Gri]

Déf. 12 : q est dite positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Elle est alors dite définie positive si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. 302

Rq 13 : si $\dim E < +\infty$, la traduction matricielle est $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

Prop. 14 : (inégalité de Cauchy-Schwarz) ++

Si q est positive, alors : $\forall x, y \in E$, $|\varphi(x,y)| \leq q(x)q(y)$ où φ est la forme polaire de q. ♡

Coro. 15 : Si q est positive, $\mathrm{Ker}\, q = \mathcal{C}_q$ ♡

Coro. 16 : (inégalité de Minkowski)

Si q est positive, alors : $\forall x, y \in E$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. ♡

Rq/Déf. 17 : Une forme quadratique définie positive est appelée produit scalaire. q définit alors une norme sur E.

II. Orthogonalité. Classification. Isotropie.

1) Bases orthogonales

Cadre : q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Déf. 18 : $x, y \in E$ sont dits q-orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$

[Gri] 304 **Déf. (19)**: Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ de E est dite (q-)orthogonale si $\varphi(e_i,e_j)=0$ $\forall i\neq j$. Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.

304 **Rq (20)**: Si $\dim E = n < +\infty$, $\mathcal{B}$ est une base orthogonale ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q$ est diagonale, et est une base orthonormée ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = I_n$

305 **Th. (21)**: Si $\dim E = n < +\infty$, alors il existe une base q-orthogonale de E.

Th. (22): *(Loi d'inertie de Sylvester)*
On suppose $\dim E = n$. On pose $r = \mathrm{rg}(q)$. Alors il existe $\mathcal{B}$ une base de
309 E et $0 \leq p \leq r$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. De plus, p ne dépend que de q. $(p, r-p)$ est appelée signature de q, notée $\mathrm{sg}(q)$.

Appli. (23): Il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalence pour l'action par congruence de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

Rq. (24): Si $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ est une base q-orthogonale, alors $q = \sum_{i=1}^{n} q(e_i)(e_i^*)^2$.
~306 La méthode de réduction de Gauss permet d'écrire q sous cette forme à partir d'une expression polynomiale de degré 2 de q.

Ex. (25): voir [ANNEXE]

Coro (26): Si $\dim E = n$, alors :
310 1) q est définie positive ssi $\mathrm{sgn}(q) = (n,0)$
2) q est non dégénérée ssi $\mathrm{sgn}(q) = (p, n-p)$

2) Sous-espaces orthogonaux

[Gri] **Déf. (27)**: Soit $A \subset E$. L'orthogonal de A est $A^{\perp} = \{x \in E \,/\, \forall a \in E,\ \varphi(x,a) = 0\}$

Prop. (28): 1) $A^{\perp}$ est un sev de E 2) $\{0\}^{\perp} = E$
311 3) $E^{\perp} = \mathrm{Ker}\, q$ 4) $\forall A \subset E$, $\mathrm{Ker}\, q \subset A^{\perp}$

Lemme (29): Soit $j : y \in E \mapsto \varphi(\cdot, y) \in E^*$. Si $\dim E < +\infty$ et F est un sev de E, alors $(j(F))^0 = F^{\perp}$.

Prop. (30): Si $\dim E < +\infty$ et F est un sev de E, alors
1) $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(F \cap \mathrm{Ker}\, q)$ 2) $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\, q$

Mettre sev isotrope !! (déf. 9.22, prop. 9.23 p 312)

3) Réduction dans un espace euclidien

Cadre : $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien. On a comme corollaires du [Gou]
théorème spectral :

Coro (31): Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe 245
une bon de E qui est également q-orthogonale.

Coro (32): *(pseudo-réduction simultanée)*
Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tCMC = I_n$ et ${}^tCNC = D$ où D est diagonale.

Lemme (33): Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ [FGN3]
Alors : $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta}$, et si $A \neq B$ l'inégalité est stricte. 229

Th. (34): *(ellipsoïde de John-Loewner)* DVP 1
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

III. Applications en analyse [Rou]

Cadre : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

Th. (35): *(Schwarz)*
Si f est deux fois différentiable en $x \in U$, alors $d^2 f(x)$ est une 294
forme bilinéaire symétrique.

Th. (36): Soit $a \in U$ telle que f soit deux fois différentiable en a, 371
et $df(a) = 0$.
1) si f admet un minimum local en a, alors $d^2 f(a)$ est positive
2) si $d^2 f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.

Ex. (37): $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^3$ admet-elle un minimum local en $(0,0)$? 378

Th. (38): *(Lemme de Morse)*
On suppose que $0 \in U$, que f est de classe C^3 sur U, que $df(0) = 0$ et DVP 2
que $d^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : x \mapsto u = \varphi(x)$ un C^1- 209
difféomorphisme entre deux ouverts de 0 tel que $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ 354

341 **Appli. 39** : Le lemme de Morse permet d'étudier la position d'une surface par rapport à son plan tangent en $(a, f(a))$ $(a \in U \subset \mathbb{R}^2)$.

329 **Th. 40** : Si U est convexe et f est deux fois sur U, alors f est convexe sur U SSI $d^2 f(x)$ est positive pour tout $x \in U$.

[Bernis] ~ 159 **Appli. 41** : si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ admet un unique point de minimum en $\bar{x}$ tel que $A\bar{x} = b$.

IV. Coniques

Cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E

[Aud]

1) Définitions

222 **Déf. 41** : On dit que f est un polynôme de degré 2 sur $\mathcal{E}$ s'il existe $O \in \mathcal{E}$, q une forme quadratique non nulle sur E, $L_0 \in E^*$ et $c_0 \in \mathbb{R}$ tels que
$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_0(\overrightarrow{OM}) + c_0$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

Rq. 42 : La forme de f ne dépend pas de O.

223 **Déf. 43** : On appelle conique la classe d'équivalence d'un polynôme de degré 2 $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ pour la relation d'équivalence « $f \sim g \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / f = \lambda g$ ».
L'image de la conique est $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} / f(M) = 0\}$.

223 **Déf. 44** : Soit $f : M \mapsto q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$ une conique. L'homogénéisée de q est la forme quadratique $Q : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(u, z) \mapsto q(u) + L(u)z + cz^2$.

f est dit propre si Q est non dégénérée.

224 **Ex. 45** : 1) Si $f = xy$ ou $f = x^2$, f n'est pas propre.
2) Si $f = x^2 + y^2 - 1$ ou $f = x^2 - y$, f est propre.

2) Centre d'une conique

227 **Déf. 46** : On dit que Ω est un centre de la conique si $L_\Omega = 0$, i.e. $f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + c'$. On dit qu'elle est à centre si Ω est unique.

Th. 47 : Une conique f admet un centre unique SSI sa partie quadratique q est non dégénérée.

3) Classification des coniques dans un espace euclidien

a°/ Si q est non dégénérée (conique à centre)

Prop. 48 : Si Q est non dégénérée, f est alors une conique propre à centre. 228
L'image s'écrit alors dans un repère orthonormé d'origine le centre :
1) soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse) 2) soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
(3) on peut avoir $\mathcal{C} = \emptyset$ ...) où $0 < b \leq a$

Rq. 49 : c'est la signature de q qui « déterminera » le type de conique

Rq. 50 : Si Q est dégénérée, l'image est alors un point (le centre) ou deux 229
droites sécantes (en le centre).

b°/ si q est dégénérée

Prop. 51 : Si Q est non dégénérée, f est propre et si son image est non vide 231
celle-ci a une équation dans un repère orthonormé de la forme
$y^2 = 2px$ (parabole)

Rq. 52 : Si Q est dégénérée, alors l'image de f est soit vide, soit une 230
droite (dite double), soit deux droites parallèles.

ANNEXE

Ex. 10 et 25 :

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$$

1) $\mathcal{B}$ = base canonique $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

[Gri] 2) Gauss : $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$

308 $\qquad = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_2x_3$

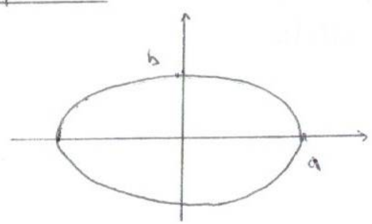
$$\underline{q(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{(e_1^*)^2} + 2\underbrace{(x_2+2x_3)^2}_{(e_2^*)^2} - \underbrace{x_3^3}_{(e_3^*)^2}}$$

Donc $\underline{rg(q) = 3}$ et $\underline{sgn(q) = (2, 1)}$

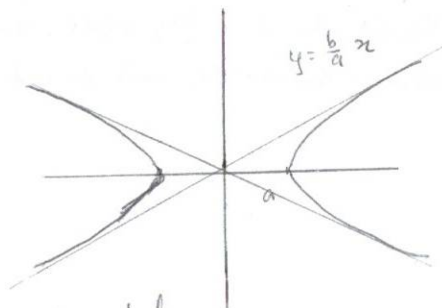
Prop. 48

[Aud]

229



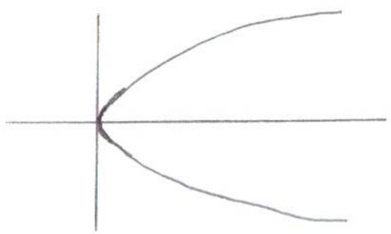
ellipse



hyperbole

Prop. 51 :

231



parabole

Références :

- [Gri] Grifone, Algèbre linéaire (4e éd.)
- [Aud] Audin, Géométrie L3M1
- [FGN3] Francinou, Oraux X-ENS Algèbre 3
- [Rou] Rouvière, PGdCD