162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Cadre : K est un corps commutatif. $n, p \in \mathbb{N}^*$

I. Système d'équations linéaires

1) Définition - Traduction matricielle

[Gri] **Déf. ①** : On appelle système d'équations linéaires un système du type :

37
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1} x_1 + \dots + a_{pn} x_n = b_p \end{cases} \quad (*)$$

où les a_{ij} et les b_i où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$ sont des éléments de K et $(x_1 \dots x_n)$ sont les inconnues du système.

Le système est dit homogène si $(b_1 \dots b_p) = (0 \dots 0)$

Rq ② : La traduction matricielle de $(*)$ est : si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$

141 $b = (b_1 \dots b_p) \in K^p$ et $x = (x_1 \dots x_n)$, on a :

$(x_1 \dots x_n)$ est solution de $(*)$ SSI $Ax = b$.

♡ **Prop. ③** : Si $A \in GL_n(K)$, $Ax = b$ admet une unique solution pour tout $b \in K^n$

2) Pivot. Système échelonné

[NH2G2] **Déf. ④** : Soit A une matrice. Le pivot d'une ligne non nulle est le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche.

204 A est dite échelonnée (en lignes) lorsque :

1) si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.

2) le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que le pivot des lignes précédentes.

Déf. ⑤ : Le système $(*)$ est dit échelonné si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ est échelonnée.

♡ **Rq ⑥** : $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est échelonnée SSI A est triangulaire supérieure.

[Gia] **Prop. ⑦** : Si $A \in GL_n(K)$ est une matrice échelonnée et $b \in K^n$, alors

82 l'unique solution de $Ax = b$ peut être obtenue en $O(n^2)$ opérations (méthode de remontée)

Ex. ⑧ : L'unique solution de $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\;\; y + 4z = 7 \\ \qquad\; -2z = -2 \end{cases}$ est $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 1)$. [Gri] 40

⚠ Ouifone faux

2) Système de Cramer

Déf. ⑨ : On appelle système de Cramer un système dont la matrice [Gri]

A est carrée et inversible. 142

Th. ⑩ : (Cramer)

Un système de Cramer $Ax = b$ où $A = [C_1, \dots, C_n] \in GL_n(K)$ et $b \in K^n$ admet pour unique solution $x = (x_1 \dots x_n)$ où

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = \frac{\det [C_1 \dots C_{i-1}, b, C_{i+1} \dots C_n]}{\det A}$$

Ex. ⑪ : Dans Ex ⑧, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. ♡

$\det A = -2$ et on retrouve bien : $\frac{1}{-2} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} \times \left(-2 \times 11 - 2 \times (-10)\right) = 1 = x_0$

Rq ⑫ : 1) La formule de Cramer ne s'applique que si $A \in GL_n(K)$ ++

2) Si $A \in GL_n(K)$, le calcul de $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i) i}$ se fait ♡

$O(n \times n!)$ opérations.

Une telle complexité le rend difficilement utilisable en pratique.

II. Matrices de transvections, de dilatations et de transpositions

1) Définitions et propriétés

Déf. ⑬ : Une matrice de transvection (resp. dilatation) de $\mathcal{M}_n(K)$ est une [Ber]

matrice de la forme : 76

79
$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \lambda \dots \\ & & 1 \end{pmatrix} i \end{array} \quad \left(\text{resp. } D_i(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \dots \\ & & 1 \end{pmatrix} i \end{array} \right)$$

où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K \setminus \{0\}$; où $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$

76
79
Prop. (14): Soient $T_{ij}(\lambda)$ une matrice de transvection et $D_i(\lambda)$ une matrice de dilation. Alors :
1) $T_{ij}(\lambda) \in SL_n(K)$ et $(T_{ij}(\lambda))^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
2) $D_i(\lambda) \in GL_n(K)$ et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

[BMP]
188
Déf. (15): Soit $\sigma \in S_n$ une permutation et $(e_1 \dots e_n)$ la base canonique de K^n. La matrice de permutation associée à σ, notée P_σ est définie par : $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

Prop. (16): Soit $\sigma \in S_n$. Alors $P_\sigma \in GL_n(K)$ et $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

Notation (17): Si $\tau = (ij) \in S_n$ est une transposition, on notera P_{ij} la matrice de permutation associée.

Prop. (18): La multiplication à gauche ou à droite d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ par une matrice de transvection, de dilatation ou de transposition a un effet décrit en [ANNEXE].

♡
Prop. (19): Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ et $M \in GL_p(K)$, alors $rg(A) = rg(MA)$

2) Applications

[Ber]
79
DVP 1
Th. (20): 1) Toute matrice $M \in SL_n(K)$ est produit de matrices de transvection.
2) Toute matrice $M \in GL_n(K)$ est produit de matrices de transvection et d'au plus une matrice de dilatation.

Appli. (20): 1) $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes
2) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

[BMP]
188
Prop. (21): $\varphi : (S_n, \circ) \longrightarrow (GL_n(K), \times)$, $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif.

[Ber]
313
Appli. (22): Si G est un groupe fini et $|G| = p^\alpha m = n$ où p premier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $p \nmid m$, alors G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ (voir démonstration du 1er théorème de Sylow)

III. Algorithme du pivot de Gauss. Applications

1) Pivot de Gauss

Algo. (23): Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$. L'algorithme du pivot de Gauss consiste à transformer A en une matrice échelonnée en la multipliant à gauche par des matrices de transvections et de transpositions. ♡

Prop. (24): Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, le pivot de Gauss est réalisé en $O(n^3)$ opérations. [Gia] 79

Ex. (25): $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12} \cdot M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{32}(-2) M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2) Applications

Appli. (26): Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $b \in K^p$ et $M \in GL_n(K)$, alors $Ax = b \iff PAx = Pb$. Le pivot de Gauss permet alors de résoudre un système d'équations linéaires, notamment avec Prop. (7) si $p = n$.

Ex. (27): [ANNEXE]

Appli. (28): Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ est une matrice échelonnée, le rang de A est égal au nombre de pivots non nuls.

Ex. (29): (algorithme de Berlekamp) [BMP]
Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini, $P \in \mathbb{F}_q[X]$ sans facteur carré de décomposition en facteurs irréductibles $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ et $L = \mathbb{F}_q[X]/(P)$. 244
On pose $S_P : L \longrightarrow L$, $y \longmapsto y^q$. Alors $r = \deg P - rg(S_P - id_L)$.

Appli. (30): Si $A \in GL_n(K)$, le pivot de Gauss permet de calculer $\det A$ ($\triangle$ $\det(P_{ij}) = -1$)

Ex. (31): Dans Ex. (25), $\det M = 2$.

[Gri]

Appli. 32 : Les applications précédentes nous permettent par exemple

44 1) de savoir si $(v_1 \dots v_k)$ est libre dans K^n ($rg(Mat_{can.}(v_1 \dots v_k)) \in M_{n,k}(K)$) ou si $(v_1 \dots v_n)$ est une base de K^n

45 2) savoir si $v \in \mathrm{Vect}(v_1 \dots v_k)$ dans K^n en résolvant $Ax = v$ où $A = Mat_{can.}(v_1 \dots v_k) \in M_{n,k}(K)$ et $x \in K^k$.

46 3) de déterminer une base de $\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_k) \cap \mathrm{Vect}(w_1 \dots w_p)$.

IV. Méthode indirecte de résolution

1) Limites de la méthode du pivot de Gauss

[NH2G2]

Rq 33 : Si l'on veut résoudre par la méthode du pivot de Gauss une EDP linéarisée sur un cube de $1\ m^3$ découpé en cubes de $1\ cm^3$, on

25 doit à chaque pas de temps résoudre un système de taille $n = (10^2)^3 = 10^6$. L'algorithme de Gauss se fait alors en $O(n^3) = 10^{18}$ opérations (~ 4 ans avec un processeur à 5 GHz).

Rq 34 : Si le/les pivot(s) sont "petits", les opérations élémentaires

26 (où l'on divise par le pivot) peuvent conduire à manipuler de "grands" flottants conduisant à des pertes d'information par arrondi (problème de conditionnement).

2) Méthode du gradient optimal

[Bernis]

Cadre 35 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\bar{x}$ l'unique solution de $Ax = b$. On pose $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$

159 On notera $\langle x, y\rangle_A = {}^t x A y$; $\|x\|_A = (\langle Ax, x\rangle)^{1/2}$ et $\|x\| = \|x\|_2$.

Lemme 36 : (Kantorovich)

Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n > 0$ les vp de A, λ_{min} la plus petite, λ_{max} la plus grande et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

DVP2

Alors $$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \ \|x\|_{A^{-1}}^2} \geqslant 4 \times \frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}$$

Th. 37 : Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, \ 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k) \end{cases}$$

DVP 2

Alors, $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x}$

ANNEXE

Prop. 18 :

$T_{ij}(\lambda)A$	$D_i(\lambda)A$	$P_{ij}A$	$AT_{ij}(\lambda)$	$AD_i(\lambda)$	AP_{ij}
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_j \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Ex. 27 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{(système de Ex. 8)}$$

Références :

- [Gri] Grifone, *Algèbre linéaire* (4e éd.)
- [NH2G2] Caldero, *Nouvelles ...* Tome 1
- [Cia] Ciarlet, *Introduction à l'ANM*
- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2e éd.)
- [Bernis] Bernis, *Analyse 40 dvpts*