160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Cadre : $(E, \langle , \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geq 1$. On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne et $id = id_E$.
On écrira bon pour base orthonormée.

I. Adjoint. Endomorphismes remarquables

1) Adjoint : définition et premières propriétés.

[Gou] 243 244 et [Ber] 94 Déf/prop. ① : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists ! f^* \in \mathcal{L}(E) / \forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
f^* est appelé adjoint de f (par rapport à $\langle , \rangle$).

Prop. ② : Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
1) $f^{**} = f$ 2) $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $f \mapsto f^*$ est linéaire 3) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
4) soit B une bon de E. Alors, $Mat_B f^* = {}^t Mat_B f$.
On a donc $\det(f^*) = \det(f)$ et $rg(f^*) = rg(f)$.

Prop. ③ : $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $\mathrm{Im} f^* = (\ker f)^\perp$

[Gou] 244 Prop. ④ : Soit F un sev de E. Alors, F est stable par f SSI $F^\perp$ est stable par f^*

2) Endomorphismes remarquables : définitions et traduction matricielle.

[Ber] Déf. ⑤ : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f^* f = f f^*$, autoadjoint si $f^* = f$,
95 antiautoadjoint si $f^* = -f$ et est une isométrie si $f^* f = id$.
Les isométries, les endomorphismes autoadjoints / antiautoadjoints sont normaux.
On notera $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Déf. ⑥ : On notera :
- $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles
- 96 $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M = -M\}$ —— antisymétriques ——
- $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M M = I_n\}$ —— orthogonales.
- $S_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in S_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X M X \geq 0\}$
- $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in S_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X M X > 0\}$

Prop. ⑦ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, B une bon de E et $M = Mat_B f$. Alors, f est normal SSI ${}^t M M = M {}^t M$; autoadjoint SSI $M \in S_n(\mathbb{R})$; antiautoadjoint SSI
96 $M \in A_n(\mathbb{R})$ et est une isométrie SSI $M \in O_n(\mathbb{R})$

Rq ⑧ : $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $M_n(\mathbb{R})$, $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop. ⑨ : Soit $B = (e_1 \dots e_n)$ une bon de E et $B' = (e'_1 \dots e'_n)$ une base de E. Alors, B' est une bon SSI $Pass(B, B') \in O_n(\mathbb{R})$. 96

Th. ⑩ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par f. Si f est normal (resp. autoadjoint, antiautoadjoint, une isométrie), alors $F^\perp$ est stable par u et $u_F, u_{F^\perp}, u^*_F, u^*_{F^\perp}$ sont normaux (resp. autoadjoints, antiautoadjoints, des isométries). 98

II. Le groupe $O(E)$

1) Premières propriétés

Rq ⑨ : Tout comme $O_n(\mathbb{R})$, $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. [Ber]
On se permettra parfois la notation fg pour $f \circ g$.

Déf./Prop. ⑩ : Si $f \in O(E)$, alors $\det f \in \{\pm 1\}$. On notera alors 99
$SO(E) = \{f \in O(E) / \det f = 1\}$ le groupe spécial orthogonal et
$O^-(E) = \{f \in O(E) / \det f = -1\}$ l'ensemble des isométries indirectes.
De plus, $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = 1\}$ et $O^-_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = -1\}$

Prop. ⑪ : $f \in O(E)$ SSI f conserve $\langle , \rangle$ SSI f conserve $\| \cdot \|$.

Rq ⑫ : ⚠ une isométrie n'est pas nécessairement bijective sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Par exemple : $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, \dots, x_n, \dots)$

Prop. ⑬ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes 98
1) $f \in O(E)$
2) pour toute bon $B = (e_1 \dots e_n)$ de E, $(f(e_1) \dots f(e_n))$ est une bon de E
3) il existe une bon $B = (e_1 \dots e_n)$ de E telle que $(f(e_1) \dots f(e_n))$ est une bon de E.

2) Symétries orthogonales. Cas de la dimension 2.

Rappel ⑭ : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $s^2 = id$ et $s \neq id$. 92
On a alors $E = \ker(s - id) \oplus \ker(s + id)$.

Déf. ⑮ : Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ par rapport à un sev F de E est dite orthogonale si sa direction est $F^\perp$ 97

Prop. 16 : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie par rapport à un sev F de E.
Alors, $s \in O(E)$ SSI s est une symétrie orthogonale.
97 On a alors $F = \mathrm{Ker}(s - id)$ et $F^{\perp} = \mathrm{Ker}(s + id)$.

Rq 17 : Si s est une symétrie orthogonale, alors il existe une bon $\mathcal{B}$ de E et $r \leq n$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, s = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Prop. 18 :
100 $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Rq. 19 : Si $\dim E = 2$ et $f \in O^-(E)$, alors il existe une bon $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (voir Déf. 21)

Rq 20 : Les isométries en dimension 3 seront traitées au III.

3) Générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$

[Ber] **Déf. 21** : Soit $x \in E \setminus \{0\}$. La réflexion orthogonale d'hyperplan $H = (\mathbb{R}x)^{\perp}$ est la symétrie orthogonale par rapport à H, i.e. l'unique $\tau_x \in \mathcal{L}(E)$ tel
101 que : 1) $\tau_{x|H} = id_H$
2) $\tau_x(x) = -x$.

Prop. 22 : Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\tau_x \in O^-(E)$.
De plus, pour tout $v \in E$ on a : $\tau_x(v) = v - 2 \dfrac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^2} x$

102 **Th. 23** : (générateurs de $O(E)$)
Soit $u \in O(E)$ et $r_u = \mathrm{rg}(u - id)$. Alors :
DVP1 1) u est la composée de r_u réflexions orthogonales
2) si u est la composée de p réflexions orthogonales, alors $p \geq r_u$

Déf. 24 : $n \geq 2$. On dit que $u \in O(E)$ est un renversement si
103 $u^2 = id$ et $\dim \mathrm{Ker}(u + id) = 2$.

Th. 25 : Soit $u \in SO(E)$. Si $n \geq 3$, alors u est la composée d'au plus n renversements 104 DVP1

Rq 26 : Faux si $n = 2$ car le seul renversement est $-id$ et toute rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ ne peut s'écrire comme $\pm id$. 105

Rq 27 : Matriciellement, $u \in \mathcal{L}(E)$ est une réflexion orthogonale (resp. un renversement) SSI il existe une bon $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$). 102 104

III. Réduction

1) Endomorphismes autoadjoints : le théorème spectral [Goui

Th. 29 : (théorème spectral)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors, il existe une bon de vecteurs propres de f. 244

Coro 30 : (matrices symétriques)
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $C \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}MC = {}^tCMC = D$ où D est diagonale. DVP2

Coro. 31 : (formes quadratiques)
Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une bon de E qui est q-orthogonale. 245

Coro 32 : (pseudo-réduction simultanée)
Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tCMC = I_n$ et ${}^tCNC = D$ où D est diagonale.

Appli. 33 : Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors : $\exists!\, S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \ /\ S^2 = M$ 245 [Fan

Appli. 34 : Soient $M, N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. 222
Alors : $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta}$.
De plus, si $A \neq B$, l'inégalité est stricte

[Ber]

2) Endomorphismes normaux

106 **Lemme 35 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une droite ou un plan de E stable par f.

Lemme 36 : $n = 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est diagonale ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 107
où $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.

Th. 37 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une

108 base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & \\ & & & b_1 & a_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}$ où $r, s \in \mathbb{N}$ vérifient $r + 2s = n$, $\lambda_i, a_j \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}^*$ pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$.

Coro 38 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antiautoadjoint (resp. une

110 isométrie). Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

111 $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & -b_1 & \\ & & & b_1 & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & -b_s \\ & & & & & & b_s & 0 \end{pmatrix}$ resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & \\ & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \cos\theta_s & -\sin\theta_s \\ & & & & & \sin\theta_s & \cos\theta_s \end{pmatrix}$

où $s \in \mathbb{N}$ et $b_j \in \mathbb{R}^*$ pour $1 \leq j \leq s$

où $p, q, s \in \mathbb{N}$ sont tels que $p + q + 2s = n$ et $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq s$.

De plus, $p = \dim(\mathrm{Ker}(u - id))$ et $q = \dim(\mathrm{Ker}(u + id))$

Appli. 39 :

101 $SO_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ et $O_3^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

IV. Application : décomposition polaire et topologie. [H2G2]

Cadre : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$. L'objectif de cette partie est de démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont homéomorphes.

Prop. 40 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Th. 41 : *(décomposition polaire)*

$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. 348
$\qquad (O, S) \longmapsto OS$

Appli. 42 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ 351
où $\|A\|_2 = \sup\limits_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$ et $\rho(M) = \max(\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\})$

Appli. 43 : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.

Prop. 44 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. 357

Coro. 45 : $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont homéomorphes 358

Références :

- [Ber] Berhuy, Algèbre : le grand combat (2e éd.)
- [Gou] Gourdon, Algèbre (2e éd.)
- [H2G2] Caldero, Nouvelles histoires... Tome 1
- [FGN3] Francinou,.. Oraux X-ENS Algèbre 3