158 - Matrices symétriques réelles. Matrices hermitiennes.

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$.
On supposera connues les notions de forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) symétrique (resp. à symétrie hermitienne), définie / positive / définie positive et d'orthogonalité relative à une telle forme.
La sesquilinéarité sera considérée à gauche, i.e. $f(\lambda x, y) = \bar{\lambda} f(x,y)$.

I. Définitions et notations, premières propriétés

Notation ① : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $M^* = {}^tM$ la transposée de M, et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M^* = {}^t\bar{M}$ est sa transconjuguée, et de même pour $X \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Déf. ② : 1) $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique si ${}^tM = M$ et antisymétrique si ${}^tM = -M$.
2) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $M^* = M$. On a alors $X^*MX \in \mathbb{R}$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$.
3) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne) est dite positive si : $\forall X \in \mathbb{R}^n$ (resp. $X \in \mathbb{C}^n$), $X^*MX \geq 0$. Elle est dite définie positive si : $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (resp. $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$), $X^*MX > 0$.

Notation ③ : On notera $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{S}_n^+$, $\mathcal{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (resp. antisymétriques, sym. positives, sym. définies positives), et $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$, $\mathcal{H}_n^{++}$) l'ensemble des matrices complexes hermitiennes (resp. hermitiennes positives, hermitiennes définies positives).

Prop. ④ : $\mathcal{S}_n^{++} \subsetneq \mathcal{S}_n^+ \subsetneq \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{H}_n^{++} \subsetneq \mathcal{H}_n^+ \subsetneq \mathcal{H}_n$.

[Gou] **Prop. ⑤** : 1) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
228 tels que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$
~229 2) $\mathcal{H}_n$ est un $\mathbb{R}$-ev tel que : $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_n = n^2$ et $\mathcal{H}_n = \mathcal{S}_n \oplus i\mathcal{A}_n$.

Rq ⑥ : $\mathcal{H}_n$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev ($I_n \in \mathcal{H}_n$ mais $iI_n \notin \mathcal{H}_n$)

Rq ⑦ : $\mathcal{S}_n^+$, $\mathcal{S}_n^{++}$, $\mathcal{H}_n^+$ et $\mathcal{H}_n^{++}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev, et n'ont pas de structure de groupe additif ou multiplicatif (un produit de $\mathcal{S}_n / \mathcal{H}_n$ n'est dans $\mathcal{S}_n / \mathcal{H}_n$ que si les matrices commutent).

II. Formes quadratiques. Formes hermitiennes

1) Rappels sur les formes quadratiques et hermitiennes. [Gou]

Déf. ⑧ : $K = \mathbb{R}$. On appelle forme quadratique sur E une application 229
$q : E \to K$ telle que : $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur K. φ est alors unique et est appelée forme polaire de q.

Ex. ⑨ : . sur $\mathbb{R}^n$, $q_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1 \dots x_n)$ 235
. sur $\mathbb{R}^3$, $q_2(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$.

Déf. ⑩ : $K = \mathbb{C}$. On appelle forme hermitienne sur E une application
$q : E \to K$ telle que : $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ où φ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne. φ est alors unique et appelée forme polaire de q. 230

Ex. ⑪ : . sur $\mathbb{C}^n$, $q_3(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ où $x = (x_1 \dots x_n)$
. sur $\mathbb{C}^2$, $q_4(x) = |x_1|^2 - 2|x_2|^2 + \frac{3}{2} x_1 \bar{x}_2 + \frac{3}{2} \bar{x}_1 x_2$ où $x = (x_1, x_2)$. 230

2) Traduction matricielle. Changement de base. [Gou]

E est un $\mathbb{R}$-ev pour les formes quadratiques, et un $\mathbb{C}$-ev pour les formes hermitiennes.

Déf. ⑫ : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E de forme 229
polaire φ et $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ une base de E. La matrice de q dans 230
$\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = [\varphi(e_i, e_j)]_{1 \leq i,j \leq n} = M$

Prop. ⑬ : Avec les notations précédentes, si $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$, alors $\varphi(x,y) = X^*MY$ et $q(x) = X^*MX$.

Coro. ⑭ : q est entièrement déterminée par M.
Si $K = \mathbb{R}$ et q est une forme quadratique, alors $M \in \mathcal{S}_n$
Si $K = \mathbb{C}$ ——— hermitienne, ——— $M \in \mathcal{H}_n$

Réciproquement, $A \in \mathcal{S}_n$ (resp. $A \in \mathcal{H}_n$) peut toujours être vue comme la matrice d'une forme quadratique (resp. hermitienne) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Ex. ⑮ : Dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{C}^2$, on a
$\mathrm{Mat}\, q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}\, q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$ ~230

231 Prop. ⑯ : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} q = P^* \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} q P$.

229 Déf. ⑰ : La propriété précédente permet de définir $rg(q) = rg(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} q)$

3) Lois d'inertie de Sylvester, action par congruence

[Gou] 231 Déf. ⑱ : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E de forme polaire φ. Une base $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ de E est dite q-orthogonale si :
$\forall\, 1 \leq i,j \leq n \,/\, i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Rq ⑲ : c'est équivalent à dire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q$ est diagonale.

Th. ⑳ : Avec les notations précédentes, il existe une base q-orthogonale de E.

Coro. ㉑ : $\forall A \in \mathcal{S}_n$ (resp. $A \in \mathcal{H}_n$), $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) $/ P^* A P = D$ où D est une matrice diagonale.

[H2G2] ~ 255 ♡ Th. ㉒ : (Lois d'inertie de Sylvester)
Si q est une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_{r-p} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ où $r = rg(q)$ et $p \in \mathbb{N}$ est un entier $\leq r$ qui ne dépend que de q.
Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q, noté $sgn(q)$

[Gou] 232 Rq ㉓ : En pratique on utilisera la méthode de réduction de Gauss pour écrire $q = \sum_{i=1}^{r} a_i |\ell_i^*|^2$ où $(a_1 \dots a_r) \in \mathbb{R}^r$ et $(\ell_1^* \dots \ell_r^*)$ sont des formes linéaires, linéairement indépendantes.

235 Ex ㉔ : $q_2(x,y,z) = (x + \frac{z}{2})^2 - 2(y \cdot \frac{z}{4})^2 - \frac{z^2}{8}$ et $sgn(q) = (1,2)$, $rg(q) = 3$.

[H2G2] 250 Déf. / Prop. ㉕ : $\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n & \longrightarrow & \mathcal{S}_n \\ (P, M) & \longmapsto & {}^tPMP \end{array}$ est une action de groupe appelée action par congruence.

254 ~ Th. ㉖ : La signature est un invariant total pour l'action par congruence. $M, M' \in \mathcal{S}_n$ sont dans la même orbite SSI $sgn(M) = sg(M')$.

III, Prise en compte du caractère euclidien / hermitien de $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

Notation ㉗ : On notera $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} \bar{x_i} y_i$ le produit scalaire euclidien / hermitien sur $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$. E est maintenant euclidien ou hermitien.

1) Endomorphismes autoadjoints

[Gou] Déf. / Prop. ㉘ : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists !\, f^* \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ 243
f^* est appelé adjoint de f et f est dit autoadjoint si $f^* = f$.

Prop. ㉙ : Si E est euclidien (resp. hermitien), alors $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint SSI la matrice de f dans une base orthonormée (bon) de E est symétrique (resp. hermitienne). 244

Coro. ㉚ : $M \in \mathcal{S}_n$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n$) peut toujours être vue comme la matrice d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) dans la base canonique.

Prop. ㉛ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E. Alors F est stable par f SSI 244
$F^\perp$ est stable par f^*.

2) Théorème spectral

[Gou] Th. ㉜ : (Théorème spectral)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f, et de plus ses valeurs propres sont réelles. 244

Rappel ㉝ : $O_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = I_n\}$ $\quad U_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, M^*M = I_n\}$

Coro ㉞ : Soit $M \in \mathcal{S}_n$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n$). Alors il existe $C \in O_n$ (resp. $C \in U_n$) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ où D est diagonale réelle.

Coro. ㉟ : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E euclidien (resp. hermitien). Alors il existe une bon de E qui est q-orthogonale. 245

Coro. ㊱ : (pseudo-réduction simultanée)
Soient $M, N \in \mathcal{S}_n$ (resp. $M, N \in \mathcal{H}_n$) telles que $M \in \mathcal{S}_n^{++}$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n^{++}$).
Alors : $\exists\, C \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $C \in GL_n(\mathbb{C})$) $/ C^*MC = I_n$ et $C^*NC = D$ où D est diagonale réelle.

[GN3] 229 VP1 **Appli. 37 :** (ellipsoïde de John-Loewner)
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en O contenant K de volume minimal.

IV. Topologie. Applications en analyse.

1) Décomposition polaire et applications

[H2G2] **Th. 38 :** (décomposition polaire)

μ : $O_n \times \mathcal{S}_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$(O,S) \longmapsto OS$

348 **Coro. 39 :** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ où

351 $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ et $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}$

351 **Coro. 40 :** Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant O_n est O_n lui-même.

357 **Prop. 41 :** $\exp : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}$ est un homéomorphisme

358 **Coro. 42 :** $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont homéomorphes.

2) Différentielle seconde et matrices symétriques.

Cadre 43 : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application.

Déf./Rappel 44 : Si f est deux fois différentiable en $x \in U$, alors sa différentielle seconde en x est $d^2f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ peut être identifiée à une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est appelée matrice hessienne de f en x, notée $Hess_x f$.

Th. 45 : (symétrie de Schwarz)
Soit $x \in U$. Si f est deux fois différentiable en x, alors $Hess_x f \in \mathcal{S}_n$.

[Rou] 114 354 DVP2 **Appli. 46 :** (lemme de Morse)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $df(0) = 0$ et que $Hess_0 f \in GL_n(\mathbb{R})$ et est de signature $(p, n-p)$.

Alors, il existe $\Psi : x \longmapsto u = \Psi(x)$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant O tel que DVP2

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad \text{où } u = (u_1 \dots u_n)$$

3) Extremums et analyse numérique

Th. 47 : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$ et f est deux fois différentiable en x_0. [Rou] 371
1) Si f admet un minimum en x_0, alors $Hess_{x_0} f \in \mathcal{S}_n^+$
2) Si $Hess_{x_0} f \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors f admet en x_0 un minimum local strict

Exo. 48 : $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extremums relatifs de f. [Gou] 337

Th. 49 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où U est convexe et deux fois différentiable sur U. [Rou] 329
Alors f est convexe SSI $\forall x \in U$, $Hess_x f \in \mathcal{S}_n^+$

Coro. 49 : Si $Hess_x f \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors f est strictement convexe

Appli. 50 : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors ♡

ϕ : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe.
$x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$

ϕ étant coercive, elle admet un un unique point de minimum sur $\mathbb{R}^n$, et lui appliquer un algorithme comme celui du gradient optimal a un sens...

Th. 51 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, $A = M - N$ où $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $M^* + N \in \mathcal{S}_n$. De plus, si $M^* + N \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$

Appli. 52 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. On écrit $A = D - E - F$ (voir ANNEXE)
1) Si $D + E + F \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors la méthode de Jacobi converge
2) Si $0 < \omega < 2$, alors la méthode de relaxation converge.

Références :

- [Gou] Gourdon, *Algèbre* (2e éd.)
- [H2G2] Caldero, *Nouvelles histoires ... Tome 1* (2e éd.)
- [FGN3] Francinou, ... *Algèbre 3*
- [Rou] Rouvière, *PGdCD*
- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.) pour exo 48

ANNEXE

Appli. 52 : $A =$