Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n(K)$ est muni d'une norme matricielle, notée $\|\cdot\|$.

I. Définition, premières propriétés et régularité

1) Existence et premières propriétés

Th. ① : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, E est un espace de Banach SSI toute suite de E absolument convergente est convergente.

Prop. ② : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\sum_k \frac{A^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Déf. ③ : L'exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $e^A = \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

[Ber] 988

Prop. ④ : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

1) A et e^A commutent
2) si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$
3) $e^A \in GL_n(K)$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
4) $\forall P \in GL_n(K)$, $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$

2) Régularité de la fonction exponentielle

Th. ⑤ : Soit $(f_n)_n : U \to \mathbb{R}^p$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe, une suite de fonctions différentiables sur U. Si :

1) $\exists x_0 \in U \,/\, (f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge
2) $(df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur U vers $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et localement uniformément vers une fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$. De plus, f est différentiable sur U et $df = \phi$.

Prop. ⑥ : $\exp : \mathcal{M}_n(K) \to GL_n(K)$ est différentiable, et même $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $d\exp(0_n) = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K))}$.

Coro ⑦ : Il existe U voisinage ouvert de 0_n dans $\mathcal{M}_n(K)$, V voisinage ouvert de I_n dans $GL_n(K)$ tels que $\exp : U \to V$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Rq ⑧ : $V = B(I_n, 1)$.

II. Calcul de l'exponentielle : décomposition de Dunford

Prop. ⑨ : Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. [Ber] 989

Alors $\exp D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n})$.

Th. ⑩ : (lemme de décomposition des noyaux)

Soit E un K-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P, P_1, P_2 \in K[X]$ tels que $P = P_1 P_2$ et $P_1 \wedge P_2 = 1$. On pose $F = \mathrm{Ker}\, P(u)$, $F_1 = \mathrm{Ker}\, P_1(u)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}\, P_2(u)$ qui sont des sous-espaces vectoriels de E. ~943

Alors : $F = F_1 \oplus F_2$.

De plus, le projecteur de F sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1) est un polynôme en u.

Th. ⑪ : (décomposition de Dunford)

Soit E un K-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé. Alors il existe $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que 968

1) δ et ν commutent
2) $u = \delta + \nu$
3) δ est diagonalisable et ν est nilpotent.

De plus, δ et ν sont uniques. DVP1

Prop. ⑫ : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que χ_A soit scindé. On note $A = D + N$ sa décomposition de Dunford où N est d'indice de nilpotence $r \geq 1$. Alors :

1) $\exp(A) = \exp(D) \cdot \exp(N)$
2) χ_{e^A} est scindé et $\exp A = \exp D + \exp(D) \times \sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$ est la décomposition de Dunford de $\exp A$.

Appli. ⑬ : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que χ_A soit scindé. ♡

Alors A est diagonalisable SSI $\exp A$ est diagonalisable.

Ex ⑭ : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Rq ⑮ : Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on verra au IV comment calculer une matrice à laquelle est semblable $\exp A$ en fonction des valeurs propres de A.

III. Injectivité, surjectivité et restriction de l'exponentielle

1) Cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

[H2G2] Rq. (16) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ n'est jamais injective pour $n \geq 2$.

356 (prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{Z}$ par exemple)

[2a] 49 Prop. (17) : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$

DVP 2 Th. (18) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

[Ber] 993 Coro. (19) : $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists f \in \mathbb{C}[X]$ / $A = f(A)^n$

2) Cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

[Ber] 998 Th. (20) : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

999 Coro. (21) : $A \in GL_n(\mathbb{R})$ est un carré SSI A est une puissance n-ième pour tout $n \geq 2$.

993 Prop. (22) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

Coro. (23) : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) / \det A > 0\}$.

Prop. (24) : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

994 Notations : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\bar{A} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$\mathrm{Re}\,A = \frac{A + \bar{A}}{2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\mathrm{Im}\,A = \frac{\bar{A} - A}{2i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^* = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,A & -\mathrm{Im}\,A \\ \mathrm{Im}\,A & \mathrm{Re}\,A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

Prop. (25) : Soit $\Pi = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ I_n & iI_n \end{pmatrix}$. Alors $\Pi \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $\Pi^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -iI_n & I_n \\ I_n & -iI_n \end{pmatrix}$

On a de plus pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = \Pi^{-1} A^* \Pi$.

Prop. (26) : Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose B semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Alors $B \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Ex (27) : $-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

Coro. (27) : Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Si B n'a pas de valeur propre réelle, alors $B \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. 995

Rq (28) : ⚠ L'exponentielle se comporte mal à la restriction à un sous-espace stable. $-I_2 \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ mais $-1 \notin \exp(\mathbb{R})$. 996

3) Restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et conséquences topologiques

Notations : On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (resp. symétriques positives, resp. symétriques définies positives) et $O_n(\mathbb{R}) = \{O \in GL_n(\mathbb{R}) / {}^tOO = I_n\}$.

$\mathrm{Sp}(M)$ désignera le spectre de la matrice M.

Th (29) : (décomposition polaire) [H2G2]

$$\begin{aligned} \mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme.} \\ (O, S) &\longmapsto OS \end{aligned}$$ 348

Coro (30) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ 351
où $\|A\|_2 = \sup\limits_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$ et $\rho(M) = \max(\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\})$.

Rq (31) : Le Coro. (30) est toujours valable pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Appli (32) : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. 357

Coro (33) : $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont homéomorphes. 358

Rq (34) : On peut montrer de même que $GL_n(\mathbb{C})$ et $U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$ sont homéomorphes, où $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in GL_n(\mathbb{C}) / {}^t\bar{M}M = I_n\}$.

IV. Application à la résolution d'équations différentielles

1) Rappel sur les EDL

[Dem] **Déf. 35 :** Une équation différentielle (ou système différentiel) linéaire
197 est une équation (E) $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues à $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Th. 36 : *(Cauchy-Lipschitz linéaire)*

♡ Pour tout $(t_0, V_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution Y maximale de (E), définie sur I et telle que $Y(t_0) = V_0$.

2) Cas $A(t) = A \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $B \equiv 0$

Prop. 37 : L'unique solution de $Y' = AY$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de conditions
♡ initiales (t_0, V_0) est $Y : t \mapsto e^{tA} V_0$.

Prop. 38 : Si A est diagonalisable, $Sp(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ *(comptées avec multiplicité)* et $(V_1 \dots V_n)$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$, alors
199 $(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$ est une base de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E)

[ZQ] **Prop. 39 :** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $Sp(A) = \{\lambda, \mu\}$, alors $\exp(tA)$ est
~ semblable à $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$.

383 2) Si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ *(mais pas sur $\mathbb{R}$)* et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{a \pm ib\}$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\exp(tA)$ à $e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$

3) Si A n'est pas diagonalisable *(sur $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$)*, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$, A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\exp(tA)$ à $\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$.

On peut alors dessiner le portrait de phase de $Y' = AY$
(VOIR ANNEXE).

3) Cas $B(t) \equiv 0$

Déf. / Prop. 40 : Soit (E_0) : $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue. [Dem]
On note $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de (E_0) et pour $t_0 \in I$, $\phi_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$, $Y \mapsto Y(t_0)$. 210
ϕ_{t_0} est alors un isomorphisme. On définit alors :
$$\forall (t, t_0) \in I^2,\ R(t, t_0) = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi_{t_0}^{-1}} \mathcal{S} \xrightarrow{\phi_t} \mathbb{R}^n.$$
$R(t, t_0)$ est appelée résolvante de (E_0) et sera identifiée à un élément de $GL_n(\mathbb{R})$

Prop. 41 : 1) $\forall t \in I$, $R(t, t) = I_n$ 211
2) $\forall (t_0, t_1, t_2) \in I^3$, $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
3) $R(t, t_0)$ est la solution de $\Pi'(t) = A(t)\Pi(t)$ où $\Pi(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\Pi(t_0) = I_n$.

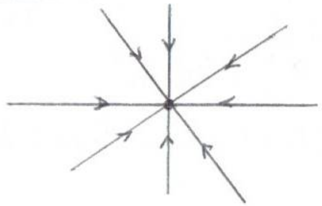
Prop. 42 : Si pour tout $(t, u) \in I^2$, $A(t)A(u) = A(u)A(t)$,
alors $R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)\, du\right)$.

[ZQ] 383

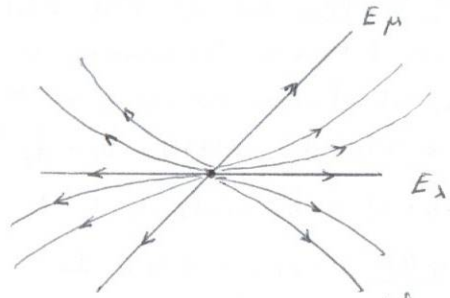
ANNEXE

Prop. 39 :

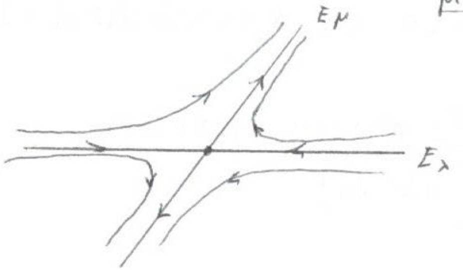
1)



$\lambda = \mu < 0$ puits

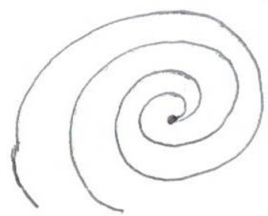


$\mu > \lambda > 0$ noeud instable

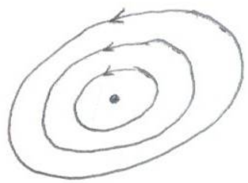


$\lambda < 0 < \mu$ col

2)

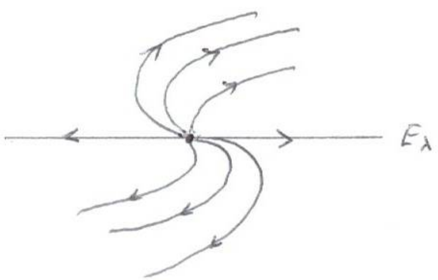


$a < 0$ foyer stable



$a = 0$ centre

3)



$\lambda > 0$

noeud dégénéré instable

Références :

- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2e éd.)
- [H2G2] Caldero, *Nouvelles histoires... Tome 1* (2e éd.)
- [Za] Zavidovique, *Un max de maths*
- [ZQ] Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4e éd.)
- [Dem] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*