# 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Cadre : Tous les corps sont supposés commutatifs. $K$ est un corps, $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

## I. Polynômes minimal et caractéristique. Eléments propres

### 1) Polynôme minimal, polynôme caractéristique

[Ber] ~ 944t... Déf./Prop. ①: On suppose $u \neq 0$. $Ann(u) = \{P \in K[X] \,/\, P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal de $K[X]$. L'unique polynôme $\mu_u$ unitaire irréductible de degré $\geq 1$ tel que $Ann(u) = (\mu_u)$ est appelé polynôme minimal de $u$.

399 Exo 1 Rq②: ⚠ si $\dim_K E = +\infty$, on peut avoir $u \neq 0$ et $Ann(u) = \{0\}$.

Th.③ : (lemme des noyaux)

Soit $P, P_1, P_2 \in K[X]$ tels que $\deg P \geq 1$, $P = P_1 P_2$ et $P_1 \wedge P_2 = 1$. On note $F = \operatorname{Ker} P(u)$, $F_1 = \operatorname{Ker} P_1(u)$ et $F_2 = \operatorname{Ker} P_2(u)$ qui sont des sous-espaces vectoriels (sev) de $E$.

~ 943 Alors : $F = F_1 \oplus F_2$.

De, le projecteur de $F$ sur $F_1$ (resp. $F_2$) parallèlement à $F_2$ (resp $F_1$) est un polynôme en $u$.

946 Déf.④: Soit $M$ la matrice de $u$ dans une base de $E$. Le polynôme caractéristique de $u$ (et de $M$) est $\chi_u = \det(XI_n - M) \in K[X]$.

Prop.⑤: $\chi_u$ est unitaire et $\deg \chi_u = n$.

Ex.⑥: Soient $(a_0 \dots a_{n-1}) \in K^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

947 Alors $\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

Th.⑦: (Cayley-Hamilton)

948 $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$.

951 Prop.⑧: $\mu_u \mid \chi_u \mid \mu_u^n$. $\mu_u$ et $\chi_u$ ont donc mêmes diviseurs irréductibles dans $K[X]$, et en particulier les mêmes racines.

### 2) Eléments propres

Déf.⑨: $\lambda \in K$ est une valeur propre (vp) de $u$ s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. $x$ est appelé un vecteur propre ($\vec{vp}$) de $u$ associé à $\lambda$, et on note $Sp(u) = \{\text{vp de } u\}$ le spectre de $u$. [Ba] 956

$E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda id)$ est appelé sous-espace propre de $u$ associé à la vp $\lambda$. Il est stable par $u$.

Prop.⑩: $\lambda \in Sp(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

Déf.⑪: Soit $\lambda \in Sp(u)$. Le plus grand entier $m_\lambda \geq 1$ tel que $(X-\lambda)^{m_\lambda} \mid \chi_u$ est appelé multiplicité (algébrique) de $\lambda$. 957

$E_\lambda^{m_\lambda} = \operatorname{Ker}(u - \lambda id)^{m_\lambda}$ est appelé sous-espace caractéristique de $u$ associé à $\lambda$. Il est stable par $u$.

Prop.⑫: $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda^{m_\lambda}$ ♡

Ex.⑬: Si $u$ est nilpotent d'indice $n$, alors $Sp(u) = \{0\}$, $m_0 = n$ et $\mu_u = X^n$. ♡

## II. Diagonalisabilité : définition et caractérisation

### 1) Définition

Déf.⑭: $u$ est diagonalisable s'il existe $e = (e_1 \dots e_n)$ base de $E$ telle que $Mat_e u$ est diagonale, ce qui équivaut à dire que $e$ est une base de $\vec{vp}$ de $u$. [Ba] ~ 955

### 2) Caractérisation dans le cadre général

Th.⑮: Sont équivalentes : 957

1) $u$ est diagonalisable 2) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$

3) $\chi_u$ est scindé, et pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$ ($= \dim E_\lambda^{m_\lambda}$)

Coro⑯: Si $u$ possède $n$ vp distinctes, alors $u$ est diagonalisable. 958

Rq⑰: La réciproque est fausse (prendre $u = id$).

Prop. 18 : Soit $\lambda \in Sp(u)$, $x \in E$ un $\vec{vp}$ associé à $\lambda$ et $P \in K[X]$.
Alors : $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

959 Th. 19 : Sont équivalentes :

1) $u$ est diagonalisable 2) $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ annule $u$

3) $\exists P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.
On a alors : $Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

4) $\mu_u$ est scindé à racines simples 5) $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$

♡ Ex. 20 : Si $u$ est nilpotent d'indice $n \geq 2$, montrer que $u$ n'est pas diagonalisable.

960 Prop. 21 : Soit $F$ un sev de $E$ stable par $u$.
Si $u$ est diagonalisable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

Th. 22 : (codiagonalisation)
Soient $u, u' \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ u' = u' \circ u$. S'ils sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans une même base.

## 2) Cadre euclidien / hermitien

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien ($K = \mathbb{R}$) ou hermitien ($K = \mathbb{C}$).

[Gou] On supposera connue la notion d'adjoint d'un endomorphisme.

244 Prop. 23 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint et $F$ est un sev de $E$ stable par $f$, alors $F^\perp$ est stable par $f$.

Th. 24 : (théorème spectral)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors, il existe une base orthonormée de $E$ de vecteurs propres de $f$.

DVP1 Coro 25 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors : $\exists C \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $U_n(\mathbb{R})$) / $C^{-1}MC = C^*MC = D$, où $D$ est diagonale réelle et $C^* = {}^tC$ (resp. ${}^t\bar{C}$).

245 Coro 26 : Soit $q$ une forme quadratique (resp. hermitienne). Alors il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $E$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}\, q$ est diagonale.

Coro 27 : ("pseudo-réduction" simultanée)
Soient $M, N$ deux matrices symétriques (resp. hermitiennes) telles que $M$ soit définie positive. Alors il existe une matrice $C$ inversible telle que : DVP1
$C^* M C = I_n$ et $C^* N C = D$ où $D$ est diagonale réelle.

Appli. 28 : (décomposition polaire) [H2G
$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme.}$$ 348
$$(O, S) \mapsto OS$$
← rajouter endo. normaux si $K = \mathbb{C}$

## 3) Cas $K = \mathbb{F}_q$

Cadre : $K = \mathbb{F}_q$ est un corps fini.

Prop. 29 : Soit $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$. Alors $P = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (X - \alpha)$. ♡

Th. 30 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$.
Alors $M$ est diagonalisable SSI $M$ annule $X^q - X$.

# III. Applications

## 1) Décomposition de Dunford [Ber]

Déf. 31 : Soit $\lambda \in Sp(u)$. Le projecteur $p_\lambda$ sur $E_\lambda^{m_\lambda}$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in Sp(u), \mu \neq \lambda} E_\mu^{m_\mu}$ est appelé projecteur spectral associé à $\lambda$. 967

Rq. 32 : D'après le Th. 3, $p_\lambda \in K[u]$.

Th. 33 : (décomposition de Dunford)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ est scindé. Alors, il existe $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que 968

1) $u = \delta + \nu$
2) $\delta$ et $\nu$ commutent DVP2
3) $\delta$ est diagonalisable et $\nu$ est nilpotent.

De plus, $\delta$ et $\nu$ sont uniques.

Appli. 34 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\chi_A$ est scindé.
Alors, $A$ est diagonalisable SSI $\exp(A)$ est diagonalisable ♡

Rq (35) : De manière plus générale, la décomposition de Dunford peut servir à calculer des puissances de matrices, notamment dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (même si connaître un polynôme annulateur peut suffire ...).

## 2) Résolution d'équations différentielles

Cadre : On considère l'équation différentielle linéaire $Y' = AY$ (*) où $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On notera $W \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ l'espace des solutions de (*).

Prop. (36) : Si $A$ est diagonalisable et $(Y_1 \dots Y_n)$ est une base de $\vec{vp}$ de $A$, associés aux vp $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ (comptées avec multiplicité), alors $(t \mapsto e^{\lambda_j t} Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $W$.

[ZQ] 383 Prop. (37) : Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ de vp $\lambda, \mu$, alors selon les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ on peut tracer le portrait de phase de (*)
(VOIR ANNEXE)

# IV. Topologie. Action par conjugaison $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[BMP] 179 Notations : . $S_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1 \dots n\}$.
. $\mathcal{D}_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(K)$
. $\mathcal{T}_n(K)$ —— trigonalisables ——
. $\mathcal{C}_n(K)$ —— diagonalisables —— à valeurs propres distinctes.

## 1) Topologie

Prop. (38) : $\overline{\mathcal{C}_n(K)} = \mathcal{T}_n(K)$ et $\mathring{\mathcal{D}}_n(K) = \mathcal{C}_n(K)$.
179 En particulier : . $\mathcal{C}_n(K)$ est un ouvert de $\mathcal{T}_n(K)$
. $\mathcal{C}_n(K)$, et donc $\mathcal{D}_n(K)$ sont denses dans $\mathcal{T}_n(K)$.

Coro (39) : $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

♡ Rq (40) : FAUX si $K = \mathbb{R}$ (penser à la continuité du discriminant + $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ...)

180 Prop. (41) : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Appli (42) : Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui à $M$ associe $D$ la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford. Si $n \geq 2$, alors $\varphi$ n'est pas continue.

155
(2)

## 2) Action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}_n(K)$ [H2G2]

122 Déf. / Prop. (43) : Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on notera $O_M = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(K)\}$ son orbite pour l'action par conjugaison et $\mathrm{Stab}_M = \{P \in GL_n(K) / PMP^{-1} = M\}$.
Comme $O_M$ est en bijection avec $GL_n(K)/\mathrm{Stab}_M$, on notera $\mathcal{M}_n(K)/GL_n(K) = \{O_M, M \in \mathcal{M}_n(K)\}$.

Notation (44) : Pour $M \in \mathcal{D}_n(K)$, $Sp(M)$ désignera l'ensemble des vp de $M$ comptées avec multiplicité.
On a donc $|Sp(M)| = n$ et on considèrera que $Sp(M) \in K^n/S_n$.

Th. (45) : $\varphi : \mathcal{D}_n(K)/GL_n(K) \to K^n/S_n$, $O_M \mapsto Sp(M)$ est bien définie et bijective.

123 Coro (46) : Le polynôme caractéristique et le spectre sont des invariants de similitude (totaux) pour l'action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}_n(K)$.

Rq (47) : Le polynôme minimal n'est pas un invariant total, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

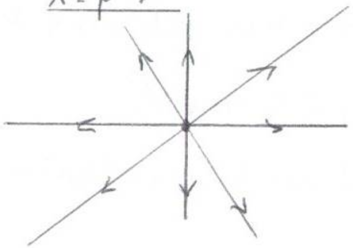
Rq (48) : Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, le polynôme caractéristique n'a aucune raison d'être un invariant total (matrices nilpotentes par exemple)

## Annexe

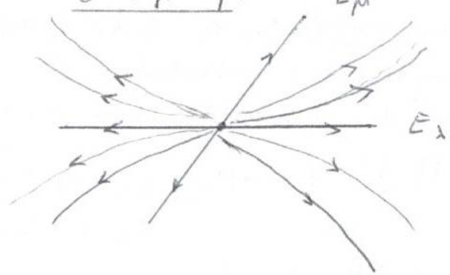
[Z Q] 383

Prop. (37) : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

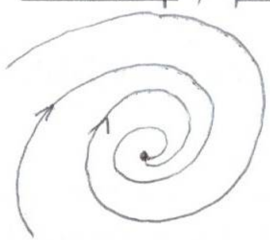
$\lambda = \mu > 0$



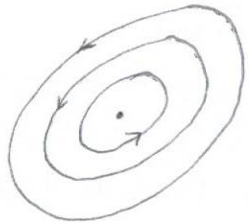
$0 < \lambda < \mu$




$\lambda = \alpha + i\beta \; ; \; \mu = \bar{\lambda}$



$\alpha < 0$



$\alpha = 0$

## Références :


- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2$^e$ éd.)
- [H2G2] Caldero, *Nouvelles histoires ...* (2$^e$ éd.) Tome 1
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation* (2$^e$ éd.)
- [Z Q] Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (4$^e$ éd.)
- [Gou] Gourdon, *Algèbre* (2$^e$ éd.