154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphisme d'un ev de dimension finie. Applications. 154 (1)

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \neq 0$.

I. Définitions, premières propriétés et exemples

Déf. (1) : Soit F un sev de E. F est dit stable par u si $u(F) \subset F$. u induit alors un endomorphisme de F noté $u_{|F}$.

Ex. (2) : $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par u.

Prop. (3) : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$ et F un sev de E. Si F est stable par u, alors F est stable par v.

Ex. (4) : On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$. $\mathbb{K}[u]$ étant une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, si F est stable par u, alors $P(u_{|F}) = P(u)_{|F}$ $\forall P \in \mathbb{K}[X]$

Rq (5) : Si $E = F \oplus G$ et F est stable par u, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F} u_{|F}$).

[Per] Prop. (6) : Si toute droite vectorielle de E est stable par u, alors

98 u est une homothétie.

Appl. (7) : $Z(GL(E)) = \{\lambda \mathrm{id}, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

II. Lemme de décomposition des noyaux et polynôme caractéristique

1) Polynôme caractéristique, polynôme minimal

Notations (8) : 1) $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u)\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On notera μ_u l'unique polynôme unitaire de $\deg \geq 1$ (si $u \neq 0$...) tel que $\mathrm{Ann}(u) = (\mu_u)$. μ_u est appelé polynôme minimal de u.

2) On notera χ_u le polynôme caractéristique de u

3) $\mathrm{Sp}(u)$ est le spectre de u, et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, m_λ est sa multiplicité algébrique, $E_\lambda^{m_\lambda} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id})^{m_\lambda}$ et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id})$.

[Ber] 948 951 Th. (9) : $\mu_u \mid \chi_u \mid \mu_u^n$

Prop. (10) : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda^{m_\lambda}$ et E_λ sont stables par u.

Th. (11) : (Lemme de décomposition des noyaux) ~943

Soient $P, P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = P_1 P_2$ et $P_1 \wedge P_2 = 1$. On pose $F = \mathrm{Ker}\, P(u)$, $F_1 = \mathrm{Ker}\, P_1(u)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}\, P_2(u)$.

Alors : $F = F_1 \oplus F_2$.

De plus, le projecteur de F sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1) est un polynôme en u.

Lemme (12) : Soit $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u. 952

Alors : $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_{|E_1}}, \dots, \mu_{u_{|E_r}})$ et $\chi_u = \chi_{u_{|E_1}} \times \dots \times \chi_{u_{|E_r}}$ 953

Coro (13) : Si $\chi_u = P_1 \dots P_r$ (resp. $\mu_u = P_1 \dots P_r$) où les $P_i \in \mathbb{K}[X]$ sont deux à deux premiers entre eux, alors pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $\chi_{u_{|\mathrm{Ker}\, P_i(u)}} = P_i$ (resp. $\mu_{u_{|\mathrm{Ker}\, P_i(u)}} = P_i$).

En particulier $\dim(\mathrm{Ker}\, P_i(u)) = \deg P_i$.

Coro (14) : Les sous-espaces propres (resp. caractéristiques) de u sont en somme directe.

2) Applications : réduction, théorème de Burnside [Ber]

Th. (15) : Sont équivalentes :

1) u est diagonalisable 2) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$ 957

3) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$

Coro (16) : Si u admet n valeurs propres (vp) distinctes, alors u est diagonalisable. 958

Lemme (17) : Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre ($\vec{vp}$) de u associé à λ. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.

Th. (18) : Sont équivalentes :

1) u est diagonalisable 2) u annule un polynôme scindé à racines simples 959

3) $\mu_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$

Rq (19) : Si u est diagonalisable, les sous-espaces stables par u sont exactement les sommes directes de sev des sous-espaces propres. ♡++

962 **Th. 19** : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable SSI χ_u est scindé.

Coro. 20 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Si u et v sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors ils sont diagonalisables (resp. trigonalisables) dans une même base. ♡

Th. 21 : (Dunford)
Si χ_u est scindé, alors il existe $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que
968 1) $u = \delta + \nu$
2) δ et ν commutent
3) δ est diagonalisable et ν est nilpotent

DVP ♡ **Appli. 22** : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si χ_A est scindé, alors : A est diagonalisable SSI $\exp(A)$ est diagonalisable.

Rq 23 : Il n'est pas nécessaire d'avoir une décomposition de Dunford pour calculer les puissances d'une matrice.

[FGN2] **Lemme 24** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est nilpotente SSI $Tr(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$

DVP 185 **Th. 25** : (Burnside)
Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

III. Sous-espace stable admettant un supplémentaire stable

1) Cas euclidien

Cadre : $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien. On supposera connue la notion d'adjoint, et on notera u^* l'adjoint de u.

[Bei] 95 **Déf. 26** : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^*u = uu^*$.

Ex. 27 : Les endomorphismes autoadjoints ($u^* = u$) et les isométries ($u^*u = id$) sont normaux.

96 **Prop 28** : Soit F un sev stable par u. Si u est normal (resp. autadjoint, une isométrie) alors F et $F^\perp$ sont stables par u et u^* et $u_{|F}$ est normal (resp. autoadjoint, une isométrie).

Th. 29 : (Théorème spectral) [Gou] 244
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée (bon) de E de vecteurs propres de u. appli : Déc. Po, $\det(\alpha A + \beta B)$

Notations 30 : 1) $O(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, u^*u = id\}$ et $SO(E) = \{u \in O(E) \,/\, \det u = 1\}$.
2) Si u est une symétrie (i.e. $u^2 = id$), on notera $E^+ = \ker(u - id)$ et $E^- = \ker(u + id)$ [Bei] ~ 97

Prop. 31 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors $u \in O(E)$ SSI $(E^+)^\perp = E^-$

Déf. 32 : Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion orthogonale. Si $n \geq 2$, une symétrie orthogonale par rapport à un sev de dimension 2 est appelée un renversement. 101 104

Th. 33 : Soit $u \in O(E)$ et $r_u = rg(u - id)$. 102
1) u est le produit de r_u réflexions orthogonales
2) si u est le produit de p réflexions orthogonales, alors $p \geq r_u$. DVP

Th. 34 : Si $n \geq 3$, alors $u \in SO(E)$ est produit d'au plus n renversements. 104

2) (Sous-)espace cyclique, réduction de Frobenius

Prop 35 : Soit $x \in E$. $Ann(x) = \{P \in K[X] \,/\, P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$. Si $x \neq 0$, l'unique polynôme unitaire μ_x tel que $Ann(x) = (\mu_x)$ est appelé polynôme minimal en x.

Déf. 36 : Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $d = \deg \mu_x \geq 1$. Le sous-espace stable engendré par x est $E_x = Vect(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$. [Bei] ~ 1014 1015

Rq 37 : E_x est stable par u

Prop. 38 : Il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$ 1015

Déf. 39 : u est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = B_x$ soit une base de E. Si $u^n(x) + a_{n-1}u^{n-1}(x) + \dots + a_0 x = 0$, alors 1016
$$Mat_{B_x} u = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$
et on l'appelle matrice compagnon du polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, notée $C(P)$.

Prop. 40 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M = C(P)$, $P \in K[X]$. Alors $\chi_M = P$. 947
($\deg P = n$, P unitaire)

Prop. 41 : Sont équivalentes

1018 1) u est cyclique 2) $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ soit une matrice compagnon

3) $\exists x \in E \setminus \{0\} \,/\, E = E_x$ 4) $\deg(\mu_u) = n$ 5) $\chi_u = \mu_u$

Rq 42 : Dès que $n \geq 2$, il existe des endomorphismes non cycliques (id).

1019 **Lemme 43** : Soit $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$. Alors E_x admet un supplémentaire stable par u.

Th. 44 : (*Frobenius*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $r \geq 1$, $F_1 \dots F_r$ des sev, $\chi_1 \dots \chi_r \in K[X]$

1021 unitaires non constants tels que :

1) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
2) $\forall i \in \{1 \dots r\}$, F_i est stable par u, $u_{|F_i}$ est cyclique et $\chi_{u_{F_i}} = \chi_i$
3) $\chi_1 \mid \chi_2 \mid \dots \mid \chi_r$

Cette décomposition est unique et est appelée décomposition de Frobenius de u.

De plus, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} C(\chi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\chi_r) \end{pmatrix}$

IV. Représentations de groupes

[5] Cadre : $(G, \cdot)$ est un groupe fini

Déf. 45 : Une représentation linéaire de G est un couple (ρ, V) où V est un

15 $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $\rho : G \to (GL(V), \circ)$ un morphisme de groupes.
$s \mapsto \rho_s = \rho(s)$

Déf 46 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et W un sev de V. W est

17 dit stable par ρ si pour tout $s \in G$, W est stable par ρ_s. On notera alors ρ^W la restriction de ρ à W.

Déf. 47 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et $V_1 \dots V_h$ des sev de V stables par ρ tels que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$. On note $\rho_i = \rho^{V_i}$. On dit alors que

19 ρ est la somme directe des ρ_i, noté $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_h$

Ex. 48 : Si ρ est la représentation constante de degré $n \geq 1$ et ρ_1 la représentation unité, alors $\rho = \bigoplus_{i=1}^{n} \rho_1$.

Th. 49 : (*Maschke*)

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et W un sev de V stable 18

par ρ. Alors W admet un supplémentaire stable par ρ.

Ex. 46' : Soit ρ la représentation régulière, $x = \sum_{t \in G} e_t$ et $W = \mathrm{Vect}(x)$. 17

Alors W est stable par ρ

Références :

- [Per] Perrin, Cours d'algèbre
- [Ber] Berhuy, Algèbre : le grand combat (2^e éd.)
- [FGN2] Francinou, Oraux X-ENS Algèbre 2
- [Gou] Gourdon, Algèbre (2^e éd.)