153. Polynômes d'endomorphisme et réduction d'endomorphisme en dimension finie.

On écrira ev (resp. sev) pour espace vectoriel (resp. sous-espace vectoriel).
$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

[Ber]

I. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Déf./Prop. ①: $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \longmapsto P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ est un
942 morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires.
$\mathbb{K}[u] = \mathrm{Im}(\varphi_u)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, si F est un sev de E stable par u, $P(u_{|F}) = P(u)_{|F}$.

Prop./Déf. ②: Si $u \neq 0$, il existe un unique polynôme unitaire de degré ≥ 1 $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathrm{Ker}\,\varphi_u = (\mu_u)$, appelé polynôme minimal de u.
On suppose désormais que $u \neq 0$.

Ex. ③: Si $u^2 = u$, $u \neq id$ alors $\mu_u = X(X-1)$

51 Rq ④: Prop. ② n'est pas toujours vraie en dimension infinie. Si E
999 est l'ev des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $u : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0, x_0, \dots)$, alors $u \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_u) = \{0\}$.

Prop. ⑤: $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u] = \deg(\mu_u)$.

Prop. ⑥: Soit $P \in \mathbb{K}[u]$. $P(u)$ est inversible dans $\mathbb{K}[u]$ ssi $P \wedge \mu_u = 1$
$\mathbb{K}[u]$ est un corps ssi μ_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Rq ⑦: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même $\mathbb{K}[A]$, μ_A, ...

Ex. ⑧: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

II. Outils de réduction des endomorphismes

1) Lemme des noyaux, polynôme caractéristique

Th. ⑨: (Lemme des noyaux)
943 Soit $P = P_1 P_2 \in \mathbb{K}[X]$ où $P_1 \wedge P_2 = 1$.
On pose $F = \mathrm{Ker}\,P(u)$ sev de E.
Alors, $F = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$.
De plus, le projecteur (de F) sur $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ (resp. $\mathrm{Ker}(P_2(u))$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ (resp. $\mathrm{Ker}(P_1(u))$) est un polynôme en u.

Ex. ⑩: Si $u^2 = u$, alors $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Ker}(u - id)$

Déf. ⑪: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M 946
est $\chi_M = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$.
Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,u$, le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = \chi_A$ (indépendant de $\mathcal{B}$).

Prop. ⑫: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, χ_M est unitaire et $\deg \chi_M = n$.
De plus, si on écrit $\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$,
alors $a_{n-1} = -\mathrm{Tr}(M)$ et $a_0 = (-1)^n \det M$.

Ex. ⑬: Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (matrice compagnon) 947
Alors, $\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

Th. ⑭: (Cayley-Hamilton)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\chi_u(u) = 0$. On a donc $\mu_u \mid \chi_u$ 948

Prop. ⑮: $\mu_u \mid \chi_u \mid \mu_u^n$. En particulier, μ_u et χ_u ont mêmes facteurs irréductibles et mêmes racines. 951

Ex. ⑯: Si u est nilpotent d'indice r ($\leq n$), alors $\chi_u = X^n$ et $\mu_u = X^r$

2) Sev stables par u

Prop. ⑰: Soit $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ une décomposition de E en
somme directe de sev stables par u. 952 - 953
Alors, $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_{E_1}}, \dots, \mu_{u_{E_r}})$ et $\chi_u = \chi_{u_{E_1}} \times \dots \times \chi_{u_{E_r}}$

Coro ⑱: Si $\mu_u = P_1 \dots P_r$ où les P_i sont premiers entre eux.
Alors, $\mu_{u_{\mathrm{Ker}(P_i(u))}} = P_i \quad \forall 1 \leq i \leq r$

Coro. (19): Si $\chi_u = P_1 \dots P_r$ où les P_i sont premiers entre eux.
Alors, $\chi_{u_{|\mathrm{Ker}(P_i(u))}} = P_i \quad \forall\, 1 \le i \le r$

[Za] 49 DVP Application des parties I et II. (20):
- si $M \in GL_n(K)$, alors $M^{-1} \in K[M]$.
- $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

[Ber]

III. Endomorphismes diagonalisables - Applications

1) Cas général

955 Déf. (21): u est dit diagonalisable s'il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale, ou de manière équivalente s'il existe $(e_1 \dots e_n)$ base de E, $(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in K^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i \ \forall\, 1 \le i \le n$.

956 Prop. (22): $\lambda \in K$ est une valeur propre (vp) de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$ (donc ssi $\mu_u(\lambda) = 0$). En particulier $Sp(u)$ est fini.

Déf. (23): Soit $\lambda \in Sp(u)$. La multiplicité (algébrique) de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u, notée m_λ.
957 $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda id)$ est le sous-espace propre (sep) de u associé à λ.
$E_\lambda^{m_\lambda} = \mathrm{Ker}(u - \lambda id)^{m_\lambda}$ ______ caractéristique (sec) ______.

Prop. (24): $m_\lambda = \dim E_\lambda^{m_\lambda}$ et $1 \le \dim(E_\lambda) \le m_\lambda$

Th. (25): Sont équivalentes
(i) u est diagonalisable (ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$
(iii) χ_u est scindé, et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$

958 Coro (26): Si u admet n vp distinctes, alors u est diagonalisable

Rq (27): Réciproque fausse, prendre $u = id$ par exemple

Prop. (28): Soit $\lambda \in Sp(u)$, x un vecteur propre ($\vec{VP}$) associé à λ.
Alors : $\forall P \in K[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$

Th. (29): Sont équivalentes :
(i) u est diagonalisable (ii) $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annule u 959
(iii) u annule un polynôme scindé à racines simples
(iv) μ_u est scindé à racines simples
(v) $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$

Ex. (30): · Si $u^2 = u$, alors u est diagonalisable.
· si u est nilpotent non nul, alors u n'est pas diagonalisable

Th. (30): Si $u, u' \in \mathcal{L}(E)$ commutent et sont diagonalisables, 960
alors ils sont diagonalisables dans une même base.

2) Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints [Gou]

Dans cette partie, $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien. On suppose connue la notion d'adjoint.

Th. (31): (*théorème spectral*) 244
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que ${}^t f = f$. DVP
Alors, f est diagonalisable en base orthonormée.

Appli. (32): (*décomposition polaire*) [Hau
L'application $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. 348
$(O, S) \longmapsto OS$

Appli. (33): Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \ge 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors
$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$
De plus, si $A \neq B$, l'inégalité est stricte.

IV. Endomorphismes trigonalisables. Applications

1) Définitions, premières propriétés

[Ber] 961 Déf. 33 : u est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

962 Th. 34 : u est trigonalisable SSI χ_u est scindé

Ex 35 : un endomorphisme nilpotent est trigonalisable ← A nilp. $\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A^k)=0\ \forall k\in\mathbb{N}^*$

[FGN2] 185 Appli. 37 : (théorème de Burnside)

Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini.

Rq 38 : Si K est algébriquement clos (ex: $K=\mathbb{C}$), tout endomorphisme est trigonalisable.

2) Endomorphismes nilpotents. Décomposition de Dunford

[Ber] 964 Notation 39 : Si $\nu\in\mathcal{L}(E)$ est nilpotent, on notera n_ν son indice de nilpotence.

Prop. 40 : Soit $\nu\in\mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes.

i) ν est nilpotent ii) $\exists n\geq 1 / \mu_\nu = X^n$. On a alors $n_\nu = n$

iii) χ_ν est scindé et $\mathrm{Sp}(\nu)=\{0\}$

iv) $\chi_\nu = X^n$

Prop. 41 : i) u est diagonalisable et nilpotent SSI $u=0$

ii) si $\nu,\nu'\in\mathcal{L}(E)$ nilpotents commutent, alors $\nu+\nu'$ est nilpotent.

967 Prop. 42 : Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$ et $u_\lambda = u_{|E_\lambda^{m_\lambda}}$.

Alors u_λ est nilpotent d'indice m_λ

Déf. 43 : On suppose χ_u scindé. Le projecteur spectral associé à $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$, noté p_λ, est le projecteur sur $E_\lambda^{m_\lambda}$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu\neq\lambda} E_\mu^{m_\mu}$.

Th. 44 : (Dunford) 968

Si χ_u est scindé, alors il existe $\delta,\nu\in\mathcal{L}(E)$ tels que :

i) $u=\delta+\nu$

ii) δ et ν commutent

iii) δ est diagonalisable et ν est nilpotent

DVP

Appli. 45 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose χ_A scindé.

Alors A est diagonalisable SSI $\exp A$ est diagonalisable

Exo 46 : Déterminer la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix}1&1\\0&c\end{pmatrix}$.

Rq 47 : . La décomposition de Dunford peut permettre de calculer des exponentielles. Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A=D+N$ où N est d'indice n, alors $e^A = e^D + e^D\sum_{k=1}^{n-1}\frac{N^k}{k!}$. (résolution d'équations différentielles)

. Il n'est en revanche pas nécessaire de réduire une matrice pour calculer ses puissances, notamment si on connaît un polynôme annulateur P (de degré le plus petit possible).

On effectue la division euclidienne $X^k = PQ+R$

et on a alors $A^k = R(A)$.

Trop long. Enlever et mettre Jordan

3) Décomposition de Jordan des endo. nilpotents

[Ber] 976

Références :

- [Ber] Berhuy, Algèbre : le grand combat (2e édition)
- [Gou] Gourdon, Algèbre (2e édition)
- [FGN2] Francinou, X-ENS Algèbre 2
- [Za] Zavidovique, Un max de maths
- [H2G2] Caldero, Nouvelles histoires hédonistes ...