152. Déterminant. Exemples et applications

Cadre : Tous les corps sont supposés commutatifs. K est un corps, A est un anneau intègre commutatif et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, E est un K-ev, $\dim_K E = n$

I. Formes multilinéaires et déterminant

1) Formes multilinéaires alternées, déterminant par rapport à une base

[Ber] **Déf. (1)** : Une forme n-linéaire sur E est une application $\varphi : \underbrace{E \times \dots \times E}_{n} \to K$ qui est linéaire en chaque variable.

62 φ est dite symétrique si : $\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, \varphi(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1 \dots x_n)$

—— antisymétrique —— : —— $\varphi(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1 \dots x_n)$

—— alternée si : $\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$, $x_i = x_j$ pour $i \neq j \Rightarrow \varphi(x_1 \dots x_n) = 0$

On notera $Alt_n(E)$ le K-ev des formes linéaires alternées sur E.

Rq (2) : $\varphi \in Alt_n(E) \Rightarrow \varphi$ antisymétrique.
Si K est de caractéristique $\neq 2$, on a équivalence.

Prop. (3) : Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E, K)$.

63 Alors $\varphi : \begin{array}{l} E \times \dots \times E \to K \\ (x_1 \dots x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)}(x_1) \dots f_{\sigma(n)}(x_n) \end{array}$ appartient à $Alt_n(E)$

Th. (4) : $\dim_K Alt_n(E) = 1$. Plus précisément :
$\forall e = (e_1 \dots e_n)$ base de E, $\exists!\ \det_e \in Alt_n(E) \,/\, \det_e(e_1 \dots e_n) = 1$

Si $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, on a $\det_e(x_1 \dots x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$

64 **Déf. (5)** : Soit e une base de E et $(x_1 \dots x_n) \in E^n$.
Alors $\det_e(x_1 \dots x_n)$ est appelé déterminant de la famille $(x_1 \dots x_n)$ dans e.

65 **Prop. (6)** : Soient $e = (e_1 \dots e_n)$ et e' deux bases de E.
Alors : $\det_{e'} = \det_{e'}(e_1 \dots e_n) \det_e$

Coro (7) : Soit e une base de E et $(x_1 \dots x_n) \in E^n$. Alors
Alors, on a : $\det_e(x_1 \dots x_n) \neq 0 \iff (x_1 \dots x_n)$ est libre
$\iff (x_1 \dots x_n)$ est une base de E

2) Déterminant d'un endomorphisme

On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ et e une base de E [Ber]

Prop. (8) : Soit $\varphi : \begin{array}{l} E \times \dots \times E \to K \\ (x_1 \dots x_n) \mapsto \det_e(u(x_1) \dots u(x_n)) \end{array}$. Alors $\varphi \in Alt_n(E)$. 65

Ainsi : $\exists!\ \det_e(u) \in K \,/\, \forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$, $\det_e(u(x_1) \dots u(x_n)) = \det_e(u) \times \det_e(x_1 \dots x_n)$ 66

Déf/Prop (9) : $\det_e(u)$ est indépendant de e. Il est appelé déterminant de u, noté $\det(u)$.

Prop. (10) : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in K$. Alors :
1) $\det(id_E) = 1$ 2) $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$ 3) $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
4) $\det(u) \neq 0 \iff u \in GL(E)$. On a alors $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$

3) Déterminant d'une matrice

[Ber]

Déf. (11) : Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$. Le déterminant de M est $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$ ~67
où $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, alors $\det(M)$ est également :
1) le déterminant de ses vecteurs colonnes par rapport à la base canonique de K^n
2) le déterminant de $u \in \mathcal{L}(K^n)$ défini par : $u(X) = MX$ $\forall X \in K^n$.

On notera indifféremment $\det : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(K) \to K \\ M \mapsto \det(M) \end{array}$ et $\det : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \to K \\ u \mapsto \det(u) \end{array}$, qui est une application continue.

Prop. (12) : En plus de la traduction matricielle de Prop (10), on a pour $M \in \mathcal{M}_n(A)$: 68
1) $\det({}^tM) = \det(M)$
2) si deux colonnes / lignes de M sont liées, alors $\det(M) = 0$
3) si $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$, on a le tableau suivant

opération sur M	$L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$
effet sur $\det(M)$	$\times(-1)$	$\times \lambda$	aucun

Ex (13) : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. $\det M = \varepsilon(id).a \times d + \varepsilon(\tau_{12})\, c \times b = ad - cb$ 69

II. Méthodes de calcul du déterminant

1) Développement selon une ligne/colonne et comatrice

[Ber] **Déf.(14)**: Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour tous $1 \leq i,j \leq n$, on note $\Delta_{ij}(M)$ le déterminant
69 de la sous-matrice de M obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j.
$\Delta_{ij}(M)$ s'appelle un mineur de M.

Prop.(15): Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors :

1) $\forall 1 \leq j \leq n$, $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(M)$
2) $\forall 1 \leq i \leq n$, $\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(M)$

Ex(16): $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = -1$

71 **Déf.(17)**: La comatrice de $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\mathrm{com}(M) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij}(M)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(K)$

Prop.(18): $M \, {}^t\mathrm{com}(M) = {}^t\mathrm{com}(M) \, M = \det(M) I_n$
En particulier, si $M \in GL_n(K)$, $M^{-1} = (\det(M))^{-1} \, {}^t\mathrm{com}(M)$

2) Pivot de Gauss

72 **Prop.(19)**: Si $M = (M_{ij})$ est triangulaire par blocs, alors $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \det(M_{ii})$

Déf.(20): Soient $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K, \lambda \neq 0$.
♡74 $T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$ est appelée matrice de transvection, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$
$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$ est appelée matrice de permutation, $P_{ij}^{-1} = P_{ji}$

La multiplication à gauche/droite de $M \in \mathcal{M}_n(K)$ a pour effets :

opération	$T_{ij}(\lambda) M$	$M T_{ij}(\lambda)$	$P_{ij} M$	$M P_{ij}$
effet	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Méthode(21): L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer $M \in \mathcal{M}_n(K)$
♡ en une matrice triangulaire supérieure en $O(n^3)$ opérations, ce qui rend aisé le calcul du déterminant (entre autre).

⚠ $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$ mais $\det(P_{ij}) = -1$!

Ex.(22): retrouver le résultat de Ex.(16) à l'aide du pivot de Gauss

3) Deux exemples particuliers

Ex(23): (matrice de Vandermonde) [Ber]
Soient $(x_1 \dots x_n) \in K^n$ et $M = (x_i^{j-1})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(K)$. 84
Alors $\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Appli(24): Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$. [FGN2] 111
Alors, M est nilpotente.

Ex(24): (matrice compagnon)
Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$
Alors $XI_n - M \in \mathcal{M}_n(K[X])$ et $\det(XI_n - M) = P$.

Appli.(25): voir Th.(28) (Cayley-Hamilton)

III. Applications en algèbre

1) Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes [Ber]

Déf(26): Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = \det(XI_n - M) \in K[X]$. 946
Si $u \in \mathcal{L}(E)$, son polynôme caractéristique est celui de sa matrice dans une base 947
quelconque de E.

Prop.(27): Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors χ_M est unitaire de degré. De plus, si on note $\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, alors $a_{n-1} = \mathrm{Tr}(M)$ et $a_0 = (-1)^n \det(M)$.

Th.(28): (Cayley-Hamilton) 948
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u \in K[u]$ est un polynôme annulateur de u.

Appli.(29): Si $u \in GL(E)$, alors $u^{-1} \in K[u]$ ♡

Appli.(30): (réduction des endomorphismes)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) u est trigonalisable SSI χ_u est scindé (ex: $K = \mathbb{C}$ ...) ♡...
2) Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Rq(31): Si $M \in \mathcal{M}_n(A)$, on peut également définir χ_A et Prop.(28) reste vraie.

2) Algèbre bilinéaire $\mathrm{car}(K) \neq 2$

Cadre : $K = \mathbb{F}_q$ est un corps fini. On notera $K^2 = \{x^2, x \in K\}$ et $K^{*2} = \{x^2, x \in K^*\}$.
E est toujours un K-ev de dimension finie $n \geq 1$. f est une forme bilinéaire sur E de forme quadratique associée q.

[Per] ~74 Soit $\alpha \in K^*$, $\alpha \notin K^{*2}$. On rappelle que $K^*/K^{*2} = \{\bar{1}, \bar{\alpha}\}$.

~118 **Déf. (32) :** Le discriminant de q est $\delta(q) = \det(q) \bmod K^2$, où $\det(q) = \det(\mathrm{Mat}_e(f))$, e étant une base quelconque de E.

129 **Th. (33) :** Il y a exactement deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E : $\underbrace{Q_1 = I_n}_{\delta(q)=1}$ et $\underbrace{Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}}_{\delta(q)=\alpha}$

[H2G2] 303 **Appli. (34) :** *(loi de réciprocité quadratique)*
Soient p, q deux nombres premiers impairs distincts.
Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}}$

3) Résultant et application

[Bos] 116 **Déf. (35) :** Soient $f = a_m X^m + \dots + a_0$ et $g = b_n X^n + \dots + b_0$ dans $A[X]$, $n, m \geq 1$.
Le résultant de f et g par rapport à X est $\mathrm{Res}_X(f,g) = \det(\mathrm{Syl}_X(f,g)) \in A$ où $\mathrm{Syl}_X(f,g) \in \mathcal{M}_{m+n}(A)$ est décrite en annexe.

Th. (36) : *(lemme de spécialisation)*
♡ Avec les mêmes notations, si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux tel que $\phi(a_m) \neq 0$ et $\phi(b_n) \neq 0$, alors $\underbrace{\phi(\mathrm{Res}_X(f,g))}_{\in B} = \underbrace{\mathrm{Res}_X(\phi(f), \phi(g))}_{\in B[X]}$

♡ ~117 **Th. (37) :** Soient $f, g \in A[X]$ de degré ≥ 1. Alors :
$\mathrm{Res}_X(f,g) = 0 \iff f$ et g ont un facteur commun de degré ≥ 1.

Th. (38) : $\overline{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \exists P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, $P(z) = 0\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$

DVP 1 **Appli. (39) :** Soit G un groupe fini, $|G| = n \geq 1$ et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation irréductible de G de degré d.
Alors, $d \mid n$

IV. Applications en analyse

Prop. (40) : Si deux matrices sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [Ber] 993

Déf. (41) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application. Si f est différentiable en $x \in U$, on appelle : ♡
1) matrice jacobienne de f en x : $J_f(x) = \mathrm{Mat}_B(df(x))$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2) jacobien de f en x : $\det(J_f(x))$.

Th. (42) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_0 \in U$. Si $J_f(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe V (resp. W) voisinage ouvert de x_0 (resp. $f(x_0)$) tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. *(th. d'inversion locale)* ♡

Appli. (43) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. [Za] 49

Th. (44) : *(théorème de changement de variable)*
Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : V \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. ♡
Si $\varphi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme (global),
alors $\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x)) \times |\det J_\varphi(x)|\,dx$.

Appli. (45) : *(ellipsoïde de John-Loewner)* [FGN3] 229
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide.
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en O contenant K de volume minimal. DVP 2

Annexe :

Déf. 35 : $f = a_m X^m + \dots + a_0 \quad g = b_n X^n + \dots + b_0$

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_m \cdots a_0}}^{m}\ \overbrace{\hphantom{a_0}}^{n} \\ \begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_m & \cdots & a_0 \\ b_n & \cdots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & b_n & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m \end{array} \in \mathcal{M}_{m+n}(A)$$

Références :

- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2^e éd.)
- [FGN2] Francinou, … *Oraux X-ENS Algèbre 2*
- [FGN3] ——— 3
- [Per] Perrin, *Cours d'algèbre*
- [Bos] Bostan, Chyzak, *Algorithmes efficaces en calcul formel*
- [H2G2] Caldero, Germoni, *Nouvelles histoires* …