<u>Notations</u> : K désigne un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On écrira "ev" pour "espace vectoriel" et "sev" pour "sous-espace vectoriel".

I. Bases, sev en dimension finie

1) Bases et dimension d'un ev

[Ber] <u>Déf. ①</u> : Soit F un K-ev. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de F est dite :
- libre si pour toute partie finie $J \subset I$, $(\lambda_j)_{j\in J} \in K$,
40 $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = 0$. Elle est dite liée sinon.
- génératrice si $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I} = F$
- une base de F si elle est libre et génératrice

F est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

[Gri] <u>Th. ②</u> : Soit F un K-ev de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice
15 et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre. <u>Alors</u> il existe une base $\mathcal{B}$ de F telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$

<u>Coro ③</u> : De toute famille génératrice de E, on peut extraire une
16 base, et toute famille libre de E peut être complétée en une base.

<u>Rq ④</u> : ce corollaire est au cœur de démonstrations comme celle du théorème de réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents.

<u>Rq ⑤</u> : Les résultats précédents restent vrais en dimension infinie mais requièrent l'utilisation de l'axiome du choix.

17 <u>Th./Déf ⑥</u> : Toutes les bases de E ont même cardinal appelé dimension de E sur K, noté $\dim_K E$. On pose $\dim_K \{0\} = 0$.

<u>Rq ⑦</u> : La dimension dépend du corps : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \neq 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

<u>Th. ⑧</u> : Soit $\mathcal{A}$ une famille de E telle que $|\mathcal{A}| = n$.
19
- <u>si</u> $\mathcal{A}$ est génératrice, <u>alors</u> c'est une base de E
- <u>si</u> $\mathcal{A}$ est libre, <u>alors</u> c'est une base de E

2) Sev en dimension finie

<u>Prop. ⑨</u> : Soit F un sev de E. Alors F est de dimension finie, et [Gri] 19
1) $\dim F \leq n$
2) $\dim F = n \Rightarrow F = E$

<u>Déf. ⑩</u> : Soient $E_1 \dots E_p$ des sev de E. On dit que E est la somme 25
directe de $E_1 \dots E_p$, noté $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ si :
$\forall x \in E,\ \exists !\ (x_1 \dots x_p) \in K^p \ /\ x = x_1 + \dots + x_p$ ~

<u>Prop. ⑪</u> : Soient E_1, E_2 deux sev de E. Alors 22

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ E = E_1 + E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim E_1 + \dim E_2 = n \end{cases} \iff \begin{cases} E_1 + E_2 = E \\ \dim E_1 + \dim E_2 = n \end{cases}$$ 23

<u>Rq ⑫</u> : La première caractérisation est fausse pour plus de deux sev !!

<u>Prop. ⑬</u> : Tout sev F de E admet un supplémentaire, et tout supplémentaire de F est de dimension $n - \dim F$.

<u>Prop. ⑭</u> : $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$ 24

<u>Ex ⑮</u> :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ 31
- si E est euclidien et F est un sev de E, $E = F \oplus F^\perp$

II. Rang

[Gri]

1) Rang d'une application linéaire

<u>Déf. ⑯</u> : Soit F un K-ev et $f : E \to F$ une application linéaire. 59
Le rang de f est $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

<u>Th. ⑰</u> : *(Théorème du rang)* 62
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg}(f) = \dim E$

<u>Coro ⑱</u> : Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors 63
f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective

<u>Rq ⑲</u> : Faux en dimension infinie, par exemple $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P'$ 63

2) Rang d'une famille de vecteurs - Rang d'une matrice

[Gri] 80 **Déf. (20)**: Soit $(x_1 \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. Le rang de $(x_1 \dots x_p)$ est $\dim(\mathrm{Vect}(x_1 \dots x_p)) = rg(x_1 \dots x_p)$

Rq: Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de E, $rg(x_i)_{i\in I} \leq n$

Appli. (21): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \neq 0$. Alors:
$\exists !\, \Pi_u \in K[X]$ unitaire, $n^2 \geq \deg \Pi_u \geq 1$ et $(\Pi_u) = \{P \in K[X],\ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$

Déf (22): Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$. Le rang de M est le rang de la
80 famille des vecteurs colonnes de M dans K^p. On le note $rg(M)$.

Prop. (23): Soit F un K-ev de dimension p, $f \in \mathcal{L}(E,F)$,
80 $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ (resp. $\mathcal{F} = (f_1 \dots f_p)$) une base de E (resp. F) et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Alors $rg(f) = rg(A)$.

Prop. (24): Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$. Alors $rg(PMQ^{-1}) = rg(M)$.

81 **Prop. (25)**: pour toute matrice A, $rg({}^tA) = rg(A)$

3) Calcul pratique du rang : le pivot de Gauss

Déf. (26): Une matrice de transvection est une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \cdots \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in GL_p(K)$ où $i<j$ et $\lambda \in K \setminus \{0\}$

Une matrice de transposition est une matrice de la forme $P_{ij} = \begin{array}{c} i \\ j \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & \cdots 1 & \\ & 1 & \cdots 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_p(K)$ où $i<j$

Prop. (27): Si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, on a les correspondances

opération	$T_{ij}(\lambda)\, M$	$P_{ij}\, M$
résultat	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

Rq (28): Les matrices de transvection jouent un rôle important dans $SL_n(K)$ dont elles forment un système de générateurs.

Déf (29): Une matrice échelonnée est une matrice dont les [Gri]
lignes commencent par un nombre strictement croissant de 0. 39

Méthode (30): Le pivot de Gauss consiste à transformer $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ en une matrice échelonnée grâce à la prop. (27).
Les prop. (24) et (25) nous permettent alors de déterminer $rg(M)$.

Ex (31): Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer $rg(M)$.

III. Applications

1) Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints [Gou]

$(E, \langle\,\rangle)$ est supposé euclidien.

Th (32): Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, 243
$\exists !\, {}^tf \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, {}^tf(y) \rangle$

Déf. (33): ${}^tf$ est appelé l'adjoint de f. Si ${}^tf = f$, f est dit autoadjoint.

Prop. (34): $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint SSI pour toute base $\mathcal{B}$ 244
orthonormée de E, ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Th. (35): (*Théorème spectral*) 244
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, alors f est diagonalisable en base orthonormée. DVP

Coro. (36): Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M$. Alors il existe $C \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale telles que
${}^tC M C = D$

Coro 37 : Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique
245 sur E. Alors il existe une base orthonormée de E qui est
DVP orthogonale pour q.

Coro 38 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que : ${}^tCMC = I_n$ et ${}^tCNC = D$.

2) Générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$

[Ba] $(E, <,>)$ est un espace euclidien.

Déf 39 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si $\|f(x)\| = \|x\| \ \forall x \in E$.

Déf./Prop. 40 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = id$, alors f est une symétrie. Si $E^+ = \operatorname{Ker}(f - id)$ et $E^- = \operatorname{Ker}(f + id)$, on a alors $E = E^+ \oplus E^-$.

97 Prop. 41 : Soit f une symétrie. f est une isométrie ssi $E^+ \perp E^-$.

Déf. 42 : Soit f une symétrie orthogonale. Si $\dim E^- = 1$, on dit que f est une réflexion orthogonale. Si $\dim E^- = 2$, on dit que f est un renversement.

Notation 43 : On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E, et $SO(E) = \{u \in O(E) \ / \ \det u = 1\}$

[Bu] 102 Th. 44 : 1) Soit $u \in O(E)$ et $r_u = rg(u - id)$. Alors
- u est la composée de r_u réflexions orthogonales.
- DVP si u est la composée de p réflexions orthogonales, alors $p \geq r_u$

104 2) Soit $u \in SO(E)$. Si $n \geq 3$, alors u est la composée d'au plus n renversements orthogonaux.

3) Exemples d'application en analyse

Th 45 : (Riesz-Fréchet)
Si E est euclidien, $\Phi : E \to E^*, \ y \mapsto \Phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est un isomorphisme isométrique.

Rq 46 : Le théorème est toujours valable si E est un espace de Hilbert.

Appli 47 : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in U$, alors :
$\exists! \ \nabla_{x_0} f \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \ df(x_0)(h) = \langle \nabla_{x_0} f, h \rangle$.

Th. 48 : Un evn de dimension finie est complet, et donc fermé.

Appli. 49 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp A$ est un polynôme en A.

4) Corps finis [Per]

Th. 51 : Soient $K \subset L \subset M$ des corps, $(e_i)_{i \in I}$ une base du K-ev L et 65
$(f_j)_{j \in J}$ une base du L-ev M. Alors $(e_i f_j)_{I \times J}$ est une base du K-ev M.

Coro 52 : $[M : K] = [M : L][L : K]$ où $[M : K] = \dim_K M$.

Déf. 53 : Soit $K \subset L$ une extension, $\alpha \in L$ et $\varphi : K[X] \to L, \ P \mapsto P(\alpha)$ 66
Si φ est injectif, α est dit transcendant sur K.
Sinon, α est dit algébrique sur K.

Th 54 : Soit $K \subset L$ et $\alpha \in L$. Sont équivalentes.
1) α est algébrique sur K
2) $K[\alpha] = K(\alpha)$
3) $\dim_K K[\alpha] < +\infty$

Th 55 : Soit $K \subset L$ et $M = \{\alpha \in L \ / \ \alpha$ algébrique sur $K\}$. 67
Alors M est un sous-corps de L. $+ \overline{\mathbb{Q}}$

Références:

- [Gri] Grifone, Algèbre linéaire
- [Ber] Berhuy, Algèbre : le grand combat (2e éd.)
- [Gou] Gourdon, Algèbre (2e éd.)
- [Per] Perrin, Cours d'algèbre