150. Exemples d'action de groupe sur les espaces de matrices

Tous les corps sont commutatifs. K est un corps. On supposera connues les définitions et principales propriétés relatives aux actions de groupe. n, p sont des entiers ≥ 1.

I. Action par translation

<u>Déf. (1)</u>: $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est une action de groupe
$(P, M) \longmapsto P \cdot M = PM$
appelée action par translation (à gauche).

<u>Prop. (2)</u>: $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K) \longmapsto \operatorname{Ker} M$ est invariante par cette action, le rang l'est donc également.

<u>Déf (3)</u>: Soient $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ et $\lambda \in K^*$.

$$\begin{array}{cc} & j \\ T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} & i \end{array}$$ est appelée matrice de transvection

$$\begin{array}{cc} P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix} \\ \phantom{P_{ij} = } \; i \quad j & \end{array}$$ est appelée matrice de permutation

ANNEXE

On a alors $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

opération	$T_{ij}(\lambda) \cdot M$	$P_{ij} \cdot M$
résultat	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

[H2G2] 204 <u>Déf. (4)</u>: On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée (en lignes) si :

1) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles
2) le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

<u>Déf./Prop. (5)</u>: L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ en une matrice échelonnée. Il repose sur le tableau de Déf. (3).

<u>Ex (6)</u>: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12} \cdot M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{32}(-2) \cdot M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>Appli (7)</u>: $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $Y \in K^n$: résolution de $MX = Y$ d'inconnue $X \in K^p$. On utilise le fait que pour tout $P \in GL_n(K)$, $MX = Y \iff PMX = PY$

<u>Appli (8)</u>: Calcul du rang de $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$: celui-ci correspond au nombre de lignes non nulles de la forme échelon

<u>Ex (9)</u>: <u>(algorithme de Berlekamp)</u> [Bech]

Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ et $S_P : \mathbb{F}_q[X]/(P) \longrightarrow \mathbb{F}_q[X]/(P)$ morphisme de $\mathbb{F}_q$-algèbres. 244
$y \longmapsto y^q$

Le nombre de facteurs irréductibles de P est : $\deg P - \operatorname{rg}(S_P - id)$

Il suffit alors d'écrire la matrice de S_P dans $\mathcal{B}(1, x, \dots, x^{\deg P - 1})$ où $x = X \bmod P$, puis d'appliquer le pivot de Gauss à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S_P - id)$.

<u>Appli (10)</u>: Calcul du déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(K)$

(⚠ si utilisation de matrices de permutation !)

<u>Ex. (11)</u>: pour M de ex. (6), $\det M = -1 \times (-2) = 2$.

II. Action de Steinitz, ou action par équivalence [H2G2]

<u>Déf. (12)</u>: $(GL_n(K) \times GL_p(K)) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$
$((P, Q), M) \longmapsto (P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}$ 5

est une action de groupe, appelée action de Steinitz. Deux matrices dans une même orbite sont dites équivalentes.

<u>Th. (13)</u>: $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont équivalentes ssi elles ont le même rang. 4

<u>Coro (14)</u>: Il y a $\min(n, p)$ orbites pour l'action de Steinitz 6

<u>Déf. (15)</u>: Pour $0 \leq r \leq \min(n, p)$, la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est appelée forme normale de l'orbite $\{M \in \mathcal{M}_{n,p}(K) \,/\, \operatorname{rg}(M) = r\}$ 4

3 Rq (16) : Deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ équivalentes sont les matrices du même $\varphi \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ dans des bases différentes.

Appli. (17) : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $GL_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $rg(M) = r$. $\exists P, Q \in GL_n(K) \,/\, A = P^{-1} J_r Q$.

Alors : $\underbrace{P^{-1}\left(J_r + \frac{1}{k} I_n\right)Q}_{\in GL_n(K)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$

Rq (18) : En règle générale, si E est un espace de Banach de dimension infinie, on n'a pas $GL_c(E)$ dense dans $\mathcal{L}_c(E)$.

III. Action par conjugaison

[H2G2] 1) Généralités

Déf. (19) : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est une action de
122 $(P, M) \longmapsto P \cdot M = PMP^{-1}$
groupe appelée action par conjugaison. Deux matrices d'une même orbite sont dites semblables.

Déf. (20) : On notera :
- $\mathcal{D}_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ diagonalisables
- $\mathcal{N}_n(K)$ ———————— nilpotentes
- $\mathcal{S}_n(K)$ ———————— symétriques
- S_n l'ensemble des permutations de $\{1 \dots n\}$
- $M \in \mathcal{S}_n(K)$, $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M

comptées avec multiplicité. On considérera que $Sp(M) \in K^n/S_n$.

Prop (21) : Le rang, le déterminant, la trace, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont invariants par l'action par conjugaison

Rq (22) : Deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$ semblables sont les matrices du même endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(K^n)$ dans deux bases "différentes".

Déf. (23) : $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable (resp. trigonalisable) si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire)

Rq (24) : Utilité de la réduction : classification (si possible) et calcul de puissances

2) Action par conjugaison sur $\mathcal{D}_n(K)$

Déf./Prop. (25) : Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on notera $\mathcal{O}_M = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(K)\}$ son orbite pour l'action par conjugaison et $Stab_M = \{P \in GL_n(K) / PMP^{-1} = M\}$ 122
Comme $\mathcal{O}_M$ est en bijection avec $GL_n(K)/Stab_M$, on notera
$\mathcal{M}_n(K)/GL_n(K) = \{\mathcal{O}_M, M \in \mathcal{M}_n(K)\}$.

Th. (26) : $\varphi : \mathcal{D}_n(K)/GL_n(K) \longrightarrow K^n/S_n$ est bien définie et bijective.
$\mathcal{O}_M \longmapsto Sp(M)$

Coro (27) : Le polynôme caractéristique, le spectre sont des invariants de similitude (totaux) pour l'action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}_n(K)$. 123

Rq (28) : Le polynôme minimal n'est pas un invariant total, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables

Rq (29) : Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, le polynôme caractéristique n'a aucune raison d'être un invariant total (voir ci-après). [Bu]

3) Action par conjugaison sur $\mathcal{N}_n(K)$

Déf. (30) : Soient $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$ et $\lambda \in K$. 976
$J_{r,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$ est appelée cellule de Jordan de taille r associée à λ.

977 Une matrice $J_n = \begin{pmatrix} J_{n_1,\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_h,\lambda} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$ où $n_1 + \dots + n_h = n$, $n_h \le \dots \le n_1$

est appelée bloc de Jordan de taille n associé à λ

Déf. 31 : Soit $u \in \mathcal{L}(K^n)$. Une base de Jordan pour u est une base $\mathcal{B}$ de K^n telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ soit diagonale par blocs, les blocs étant des blocs de Jordan.

Rq 32 : Les blocs de Jordan sont alors associés aux valeurs propres de u.

Lemme 33 : Soit $u \in \mathcal{L}(K^n)$ nilpotent d'indice $n \geq 1$. Alors on a $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}\, u \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^{n-1} \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^n = K^n$ (lemme des
DVP1 noyaux itérés)

978 Th 34 : (réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents)

Tout $u \in \mathcal{L}(K^n)$ admet une base de Jordan.

Notation 35 : $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \geq 1$, $d_k = \dim(\mathrm{Ker}\, u^k) - \dim(\mathrm{Ker}\, u^{k-1})$

979 Th 36 : 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n et $J_0 = \begin{pmatrix} J_{n_1,0} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_h,0} \end{pmatrix}$ sa forme de Jordan. Alors, $n_h = n$, et pour tout $1 \le k \le n$, le nombre de cellules de Jordan de taille k est $d_k - d_{k+1}$.

[H2G2] 131 2) Deux matrices nilpotentes sont semblables SSI elles ont même réduite de Jordan

Coro 37 : Il y a $p(n)$ orbites pour l'action de conjugaison de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{N}_n(K)$, où $p(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n

Ex 38 : pour $n = 3$:

(3)	(2,1)	(1,1,1)
$0_{\mathcal{M}_3(K)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[H2G2] IV. Action par congruence $\mathrm{car}(K) \neq 2$

250 Déf. 39 : $GL_n(K) \times \mathcal{S}_n(K) \longrightarrow \mathcal{S}_n(K)$, $(P, M) \longmapsto {}^tPMP$ est une action de groupe appelée action par congruence. Deux matrices dans la même orbite sont dites congruentes.

Déf. 40 : $K^2 = \{x^2, x \in K\}$ et $K^{*2} = \{x^2, x \in K^*\}$

Rq 41 : Deux matrices $M, N \in \mathcal{S}_n(K)$ congruentes sont les matrices d'une même forme quadratique dans deux bases "différentes".

Déf. 42 : Si $M \in \mathcal{S}_n(K) \cap GL_n(K)$, le discriminant de M est 250

$\delta(M) = \det M$ modulo K^{*2}

Prop. 43 : Le rang, le discriminant sont invariants par l'action de congruence.

Th. 44 : Soit q une forme quadratique sur K^n. Alors il existe une 251
base de K^n q-orthogonale.

Th. 45 : (lois d'inertie de Sylvester)

1) $K = \mathbb{C}$: $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(M) = r$: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ / $M = {}^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$ 254

$M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes SSI $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$. 255

2) $K = \mathbb{R}$: $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(M) = r$. $\exists ! (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p + q = r$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ 256
$M = {}^tP \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} P$. (p,q) est appelée signature de M.

$M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes SSI elles ont même signature.

3) $K = \mathbb{F}_q$: Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a alors deux classes de congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q) \cap GL_n(\mathbb{F}_q)$: I_n et $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$.
$\Rightarrow$ 2 matrices sont congruentes SSI même discriminant

[H2G2] Déf./Prop 46 : Soit p premier impair, $a \in \mathbb{F}_p$. Le symbole de Legendre de a est : $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathbb{F}_p^{*2} \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ 302

Lemme 47 : Soit p premier impair et $a \in \mathbb{F}_p^*$. 303
Alors, $\left|\{x \in \mathbb{F}_p \,/\, ax^2 = 1\}\right| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

DVP2 Th. 48 : (loi de réciprocité quadratique)

Soient p, q premiers impairs. Alors : $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}}$ 304

Ex 49 : Calculer $\left(\frac{19}{43}\right)$.

Références

- [H2G2] Caldero, Nouvelles ... Tome 1
- [Ber] Berhuy, Algèbre : le grand combat (2^{e} éd.)
- [Per] Perrin, Cours d'algèbre
- [Bech] Beck, Objectif agrégation