Suites numériques. Convergence, Valeurs d'adhérence. Ex et App.

223

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Suites numériques : généralités [1]

A] Limite de suite

Def 1 : Soit E un ensemble non vide. On appelle suite à valeurs dans E toute application $u : \mathbb{N} \to E$. Dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on parle de suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n) = u_n$ et $u = (u_n)$. u_n est alors appelé terme général de u.

Def 2 : Soient $l \in \mathbb{K}$ et u une suite de $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Prop 3 : Lorsque l existe, il est unique. À ce titre, (u_n) est dit convergente de limite l. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Lorsqu'un tel l n'existe pas, u est dit divergent.

Ex 4 : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Def 5 : Une suite (u_n) est dit bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

Prop 6 : Toute suite numérique convergente est bornée.

Th 7 : (de Césaro) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique convergente vers $l \in \mathbb{K}$. On définit la suite des moyennes de Césaro par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Rem 8 : La réciproque est fausse.

Def 9 : Une suite numérique est dite convergente au sens de Césaro si sa suite des moyennes de Césaro converge.

Ex 10 : $((-1)^n)_{n \geq 0}$ converge au sens de Césaro vers 0.

Def 11 : Soit u une suite numérique réelle.

- On dit que sa limite est $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$.
- On dit que sa limite est $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq M$.

Ex 12 : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

B] Résultats de convergence et comparaison de suites

Prop 13 : Soit u une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$ sa limite. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |l|$.

Thm 14 : (d'encadrement) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \leq u_n \leq w_n$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Prop 15 : Soient (z_n) une suite complexe et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l + il' \in \mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l'$.

Def 16 : Une suite réelle est dite croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$. Elle est dite décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

Thm 17 : (de la limite monotone) Toute suite croissante majorée est convergente.

Def 18 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Thm 19 : Deux suites adjacentes convergent, et vers la même limite.

Cor 20 : (Théorème des fermés emboîtés). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$, $[a_n ; b_n] \subset [a_{n+1} ; b_{n+1}]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Alors $\exists! l \in \mathbb{R}$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n ; b_n] = \{l\}$.

Def 21 : Soient (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On dit que :

- (v_n) domine (u_n), noté $u_n = O(v_n)$, si $\exists A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq A\, v_n$
- (u_n) est négligeable devant (v_n), noté $u_n = o(v_n)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$

Def 22 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), noté $u_n \sim v_n$, si : $(u_n - v_n) = o(|u_n|)$.

Ex 23 : $n^2 + 2n - 4 \sim n^2$

Prop 24 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On suppose que (v_n) ne s'annule pas au bout d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Ex 24 : (Stirling) $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Prop 25 : Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

II) Valeurs d'adhérence : conséquences sur les suites de Cauchy.

A] Suites extraites [1]

Def 26 : Soit (u_n) suite numérique. On appelle suite extraite ou sous-suite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. φ est appelée extractrice.

Prop 27 : Si une suite converge vers $l \in \mathbb{K}$, toute suite extraite converge aussi vers l.

Rem 28 : La réciproque est fausse.

Prop 29 : (u_n) converge vers $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l.

Def 30 : Soit (u_n) une suite numérique. On appelle valeur d'adhérence de (u_n) tout scalaire $l \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Rem 31 : Une suite convergente ne possède qu'une valeur d'adhérence.

Thm 32 : (de Bolzano-Weierstrass) Toute suite numérique bornée admet une valeur d'adhérence.

B] Limite supérieure, limite inférieure. [5]

Def 33 : Soit (u_n) une suite réelle. On appelle limite supérieure de (u_n) : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{k \geq n} u_k$ et limite inférieure $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \inf\limits_{k \geq n} u_k$.

notées $L = \overline{\lim}\, u_n$ et $l = \underline{\lim}\, u_n$.

Prop 34 : L est la plus grande valeur d'adhérence, l est la plus petite.

Cor 35 : (u_n) converge vers $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $L = l = \mu$

C] Suites de Cauchy [1]

Def 36 : Soit (u_n) une suite numérique. (u_n) est dite de Cauchy si : $\forall p \geq q, \lim\limits_{q \to +\infty} |u_p - u_q| = 0$

Ex 37 : Toute suite numérique convergente est de Cauchy.

Prop 38 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Lem 39 : Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente.

Thm 40 : Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Rem 41 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des cas particuliers d'espaces complets.

III) Applications des suites numériques

A] Dans la résolution d'équation fonctionnelle

Def 42 : Une suite (u_n) est dite récurrente (d'ordre 1) s'il existe $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. [6]

Prop 43 : Soient $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) convergente vers x_0 on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

[6] **Cor 44 :** Si f est continue et que (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $l \in \mathbb{K}$, alors l est un point fixe de f.

App 45 : Toute application contractante de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ admet un unique point fixe. (Théorème du point fixe).

[3] **Prop 46 :** (Dichotomie) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue admettant un unique zéro $l \in [a;b]$. On définit $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ sinon. Alors toute suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a_n ; b_n]$ converge vers l.

[4] **Prop 47 :** (Newton) Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c;d], f'(x) > 0$. Soit $a \in [c;d]$ l'unique zéro de f et (x_n) définie par $x_0 \in [c;d]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \phi(x_n)$ où $\forall x \in [c;d], \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors : DEV 1

- $\exists \alpha > 0, \forall x_0 \in [a-\alpha ; a+\alpha], x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$
- Si de plus $\forall x \in [c;d], f''(x) > 0$, alors $\forall x_0 \in [c;d]$, (x_n) est strictement décroissante ou constante et :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq x_{n+1} - a \leq C (x_n - a)^2 \\ \text{Si } x_0 \neq a, \ (x_{n+1} - a) \sim \frac{f''(a)}{2 f'(a)} (x_n - a)^2 \end{cases}$$

App 48 : On peut approcher le nombre d'or avec $f(x) = x^2 - x - 1$.

B] Critère de Weyl [2]

Def 49 : Soit (u_n) une suite de $[0;1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq a < b \leq 1$, $S_n(a,b) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1;n]\!] \mid u_k \in [a;b]\}$. On dit que (u_n) est équirépartie si $\forall 0 \leq a < b \leq 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(a,b)}{n} = b - a$.

Prop 50 : Toute suite équirépartie est dense dans $[0;1]$.

Thm 51 : (Critère de Weyl) Soit (u_n) une suite dans $[0;1]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes : DEV 2

- (u_n) est équirépartie
- Pour toute fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$

Ex 52 : La suite $(n\theta)_{n \geq 0}$ modulo 1 est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

C] Dans l'étude des séries numériques [1]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Def 53 : On appelle série de terme général (u_n) la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $(\sum u_n)$.

Prop-def 54 : Si $(\sum u_n)$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge grossièrement.

Rem 55 : La réciproque est fausse.

Prop 56 : (u_n) converge si et seulement si $(\sum u_{n+1} - u_n)$ converge.

Prop 57 : Si $u_n \sim v_n$ alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Prop 58 : Si (v_n) est positive et $(\sum v_n)$ converge, alors si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ alors $(\sum u_n)$ converge.

Prop 59 : (Critère des séries alternées) Soit (a_n) positive, décroissante et tendant vers 0. Alors $(\sum (-1)^n a_n)$ converge.

férences :

- Suites et séries numériques (El Amrani) [1]
- Cours X-ENS Analyse 2 (Francinou, Gianella, Nicolas) [2]
- Analyse numérique : une approche mathématique (Schatzman) [3]
- Le petit guide du calcul différentiel (Rouvière) [4]
- Analyse pour l'agrégation (Queffélec) [5]
- Les maths en tête : Analyse (Gourdon) [6]