245

NOM : PRENOM :

Sujet choisi : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Autre sujet :

U ouvert de $\mathbb{C}$. $f : U \to \mathbb{C}$

I Holomorphie et analyticité

1 Holomorphie

[AM] p65 **DEF1** f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in U$ si la limite $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

p66 **PROP2** f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ ssi $(x,y) \mapsto f(x+iy)$ est différentiable en (x_0, y_0) et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $df_{(z_0)} = \lambda dz$, similitude directe de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, $\lambda = f'(z_0)$.

[TAU] p59 **PROP3** f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ ssi $(x,y) \mapsto f(x+iy)$ est différentiable en (x_0, y_0) et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

EX4 $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ mais n'est $\mathbb{C}$-dérivable nulle part.

DEF5 f est dite holomorphe sur U si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.
On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

p61 **PROP6** On suppose U connexe et f holomorphe. Si $f' = 0$ sur U alors f est constante sur U.

2 Analyticité

DEF7 On dit que f est analytique sur U si p50 elle est développable en série entière en tout point de U. On note $f \in \mathcal{A}(U)$.

p50 **Rq8** D'après les propriétés sur les séries entières, une fonction analytique sur U est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U et ses dérivées sont analytiques.

PROP9 $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$

p51 **PROP10** Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, sa somme est analytique sur le disque ouvert $D(0,R)$.

EX11 $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car p51
si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z-a| < |a|$ alors $\frac{1}{z} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n$.

TH12 [Prolongement analytique] p52
On suppose U connexe et $f \in \mathcal{A}(U)$. Soit $a \in U$.
f est identiquement nulle
f est nulle dans un voisinage de a
$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$

COR13 On suppose U connexe. $f, g \in \mathcal{A}(U)$. p52
Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, on a $f = g$.

EX13 $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\forall n > 0, f(\frac{1}{n}) = \frac{2}{n} \Rightarrow f(z) = 2z$.

TH14 [Zéros isolés] p53
On suppose U connexe et $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle.
Alors l'ensemble des zéros de f est discret.

PROP15 On suppose U connexe et $f \in \mathcal{A}(U)$ non p53
identiquement nulle. Soit $a \in U$ un zéro de f.
Alors il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$, un voisinage $V \subset U$ de a et $h \in \mathcal{A}(V)$ tel que
$h(a) \neq 0$ et $\forall z \in V, f(z) = (z-a)^k h(z)$.

Rq16 On appelle k l'ordre (ou la multiplicité) de a. p53

II Formule de Cauchy et conséquences

1 Formule de Cauchy

DEF17 On dit que $\gamma : [0;1] \to U$ est un chemin p68
dans U si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
γ est dit fermé si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

DEF18 On suppose f continue. p69
On définit $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

245

NOM : PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

p71 **TH/DEF 19** Soit γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$.
On pose $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$.
On définit $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ds}{s-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$.
L'application $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe non bornée de U.

p72 **EX 20** Soit γ un cercle $C(a,r)$ orienté dans le sens direct.
$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-a| > r, \\ 1 & \text{si } |z-a| < r. \end{cases}$

p72 **TH21** On suppose f continue sur U.
f possède une primitive dans U
$\Leftrightarrow$ pour tout chemin fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

p74 **TH22** On suppose U convexe et f continue sur U telle que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$.
Alors f admet une primitive dans U.

p74 **TH23** [Goursat]
Soit $w \in U$. On suppose f continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{w\}$.
Pour tout triangle $\Delta \subset U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

p76 **TH24** [Cauchy pour un convexe]
Soit $w \in U$. On suppose U convexe, f continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{w\}$.
Alors f possède une primitive sur U et, pour tout chemin fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

p77 **TH25** [formule de Cauchy pour un convexe]
Soit γ un chemin fermé dans U convexe.
Soit $z \in U \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. On suppose $f \in \mathcal{H}(U)$.
Alors $f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds$.

p77 **TH26** Soit $a \in U$. On suppose $f \in \mathcal{H}(U)$.
- $f \in \mathcal{A}(U)$ et le rayon de convergence de sa série de Taylor en a est $\geq d(a, \mathbb{C}\setminus U)$.
- Si U est convexe et γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$, alors
$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds$.

p78 **TH27** [Morera] On suppose f continue sur U.
$f \in \mathcal{H}(U)$
$\Leftrightarrow f \in \mathcal{A}(U)$
$\Leftrightarrow f$ possède localement une primitive dans U
$\Leftrightarrow$ pour tout triangle $\Delta \subset U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

2 Inégalités de Cauchy

p84 **TH28** [inégalités de Cauchy]
Soit $R > 0$. $U = D(0,R)$. On suppose $f \in \mathcal{H}(U)$.
Alors $\forall r \in]0;r[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{|z|=r}|f(z)|$.

p85 **COR 29** [théorème de Liouville]
Toute fonction entière ($\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$) bornée est constante.

p85 **COR 30** [théorème de d'Alembert]
$\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

[AM] p91 **TH 31** [théorème de convergence de Weierstrass]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(U)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur les compacts de U vers f.
Alors $f \in \mathcal{H}(U)$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers f'.

p91 **EX 32** $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

[AM] p94 **TH 33** [holomorphie sous l'intégrale].
Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $F : U \times T \to \mathbb{C}$.
On suppose :
- $\forall z \in U$, $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable
- $\forall t \in T$, $z \mapsto F(z,t) \in \mathcal{H}(U)$
- $\forall$ compact $K \subset U$, $\exists u_K \in L^1(T,\mu)$, $\forall (z,t) \in K \times T$, $|F(z,t)| \leq u_K(t)$.

Alors $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\,d\mu(t) \in \mathcal{H}(U)$.
De plus ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale.

245 Refs [AM] AMAR, MATHERON, Analyse complexe

NOM : [TAU] TAUVEL, Analyse complexe pour la L3 PRENOM :

[BEC] BECK, Objectif agrégation

Sujet choisi : [RUD] RUDIN, Analyse réelle et complexe

[CAN] CANDELPERGHER, Calcul intégral

Autre sujet :

p95 **EX34** $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt \in \mathcal{H}(\{\mathrm{Re}(z)>0\})$.

[BEC] p112 DEV1 **APP35** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de poids.
S'il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < \infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

3 Principe du maximum

[RUD] p257 **TH36** [Principe du maximum]
On suppose U connexe bornée, f continue sur $\bar{U}$ et f holomorphe sur U.
Alors $\forall z \in U$, $|f(z)| \leq \sup_{\partial U} |f|$.
De plus si l'inégalité est atteinte pour un $z \in U$ alors f est constante.

[TAU] p97 **TH37** [Lemme de Schwarz]
On suppose $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $f(0)=0$ et $\forall |z|<1, |f(z)|<1$.
Alors $\forall |z|<1$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
En outre si $|f'(0)|=1$ ou $(\exists |z|<1,\ z\neq 0$ et $|f(z)|=|z|)$ alors il existe $|\lambda|=1$ tel que $f=\lambda\,\mathrm{Id}$.

p98 **TH38** $\mathrm{Aut}(D(0,1)) = \{\lambda\varphi_a,\ |\lambda|=1,\ a\in D(0,1)\}$
où $\varphi_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

III Fonctions méromorphes

1 Singularités

p99 **DEF39** Si $f \in \mathcal{H}(V\setminus\{a\})$ avec $a \in V$ ouvert, on dit que f a une singularité isolée en a.
Si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a, on dit que a est une singularité illusoire.

p99 **PROP40** Soit $a \in V$ ouvert. $f \in \mathcal{H}(V\setminus\{a\})$
On suppose qu'il existe $r>0$ tel que f est bornée sur $V \cap D^*(a,r)$ où $D^*(a,r) = D(a,r)\setminus\{a\}$.
Alors a est une singularité illusoire de f.

p99 **TH/DEF41** Soit $a \in V$ ouvert. $f \in \mathcal{H}(V\setminus\{a\})$.
Alors f vérifie un et un seul des points suivants.
- f a une singularité illusoire en a
- Il existe une unique suite finie $(a_{-1}\dots a_{-m}) \in \mathbb{C}^m$ avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$ tel que la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$ ait une singularité illusoire en a.

On dit alors que a est un pôle d'ordre m de f et que le polynôme $\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$ en $(z-a)^{-1}$ est la partie principale de f en a.

- Pour tout $r>0$ tel que $D(a,r) \subset U$, $f(D^*(a,r))$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit que f a une singularité essentielle en a.

p101 **EX42** $f : z \mapsto e^{1/z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ a une singularité essentielle en 0.

p101 **DEF43** f est dite méromorphe dans U s'il existe $A \subset U$ discret fermé tel que $f \in \mathcal{H}(U\setminus A)$ et que tout point de A est un pôle de f. On note $f \in \mathcal{M}(U)$.

2 Résidus

p102 **DEF44** On suppose $f \in \mathcal{M}(U)$. Soit $a \in U$ pôle d'ordre $m \geq 1$ de f, la partie principale de f en a est :
$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}.$$
On appelle $a_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$ le résidu de f en a.

p102 **LEM45** Avec les notations précédentes, si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$, on a :
$$\int_\gamma P(z)\,dz = \mathrm{ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a).$$

p103 **TH46** [résidus]
Soient $a_1 \dots a_m$ des points 2 à 2 distincts d'un ouvert V.
On suppose $f \in \mathcal{H}(V\setminus\{a_1\dots a_m\})$ et que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k).$$

[CAN] p131 **EX47** Calcul de la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

p135 **EX48** Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

[AM] p249 DEV2 **APP49** [formule des compléments]
$\forall s \in \mathbb{C}$, $0<\mathrm{Re}(s)<1$, $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.